

基于弧度仪的冰刀弧形测量与重构方法

黄东兆,赵前程

(湖南科技大学 机械设备健康维护湖南省重点实验室,湖南 湘潭 411201)

摘要:采用弧度仪测量冰刀弧形具有方便,快捷等优点.对基于弧度仪的冰刀弧形测量与重构方法进行了深入研究,在弧形重构时对比了小弧段切触法,作者提出了基于曲率插值与拟合的迭代重构方法,后者明显优于前者.由于迭代重构得到的冰刀弧形是由大量的型值点表达,故探究了型值点集的圆弧样条拟合方法,对影响拟合误差的圆弧样条参数进行了理论分析和推导,得到了这些参数的调整方法.采用该拟合算法,大幅度地简化了迭代重构得到的冰刀弧形表达,极大地方便了冰刀弧形的描述与加工.上述成果在作者开发的数控冰刀弧形重构系统中得到了应用.

关键词:冰刀测量,冰刀弧形重构,迭代修正,圆弧样条拟合

中图分类号:TP391.7; TH164 **文献标志码:**A **文章编号:**1672-9102(2017)03-0022-07

Research on measurement and reconstruction method for skate-arc based on radian meter

Huang Dongzhao, Zhao Qiancheng

(Hunan Provincial Key Laboratory of Health Maintenance for Mechanical Equipment,
Hunan University of Science and Technology, Xiangtan 411201, China)

Abstract: It is convenient and quick when using radian meter to measure skates arc. Measurement and reconstruction method for skate-arc were further studied. In arc reconstruction, the small arc-segment contact method was compared with the iterative reconstruction based on curvature interpolation and fitting put forward in this paper. The latter was obviously superior to the former. The skate arc shape generated from the above iterative reconstruction was expressed by use of a large number of data points, so arc-spline fitting method for data points was deeply studied. These parameters to affect the fitting error of arc-spline were detailedly analyzed and deduced. The adjustment method about these parameters was obtained. When using this fitting method, the skate arc expression generated from iterative reconstruction was greatly simplified. It's very convenient for description and processing for skate arc shape. The above achievement was applied in the NC skates reconstruction system developed by the author.

Keywords: skate measurement; reconstruction for skate-arc; iterative correction; arc-spline fitting

冰刀的外形如图 1 所示,冰刀弧形的测量一般采用数控测量,图像处理测量和弧度仪采样测量^[1].数控测量精度高,但耗时长,且受限于场合.图像处理测量精度适中,但对操作者要求高.用弧度仪对冰刀弧手动采样,耗时仅 1 min 多,方便,快捷.如图 2 所示,当采用弧度仪测量时,通常采用顶针法测量,即利用弧度仪从冰刀弧的前端开始测量,依次使得各个测量弧段“顶针式”首尾相连,将弧度仪移动到各个弧段,记录下百分表的读数,查表对照即可得到测量点的曲率数值系列,但这种方式测得的不是坐标数据.本文针

收稿日期:2016-05-23

基金项目:湖南省自然科学基金资助项目(13JJ4082);湖南省科技计划资助项目(2010TP4003-6;2012TP4023-4)

通信作者:黄东兆(1978-),男,安徽桐城人,博士,讲师,主要从事数控技术、机器视觉测量等研究.E-mail: hushthdz@163.com

对基于曲率的冰刀弧形重构作深入的分析,将曲率数据转换为正交坐标数据以满足加工要求.同时采用本文提出的一种圆弧样条拟合大量型值点的算法简化冰刀弧形的表达.



图1 冰刀外观图

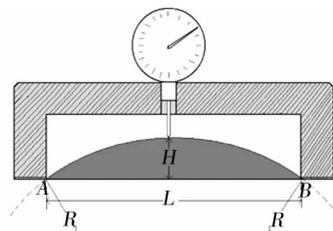


图2 弧度仪

1 冰刀弧形的测量与重构方法

如图1所示,冰刀弧形近似于直线,但实际是一条大部分区域曲率半径为8~11 m的光滑曲线.某运动员使用的冰刀在水平方向上的长度为460 mm,现使用跨距为 $L=60$ mm的弧度仪从左到右,采用顶针式测量法去测量它,共测量7次,冰刀的右端还有一部分没测完,因为长度不够一跨距.冰刀弧形的7个区域的半径 R 测量结果依次为11.002,10.033,10.185,8.734,5.710,5.468与4.023 m.

1.1 基于小弧段切触法的重构方法

基于小弧段切触法^[1](用等弦长的小弧段切触生成曲线,使相邻弧段在过渡处一阶连续)重构得到的曲线(圆弧样条)如图3所示.其中在垂直方向上的最大误差为0.733 mm.通常冰刀的弧顶高值为4~5 mm,上述方法得到的冰刀弧形的误差较大,故需寻找一种精度较高的重构算法.

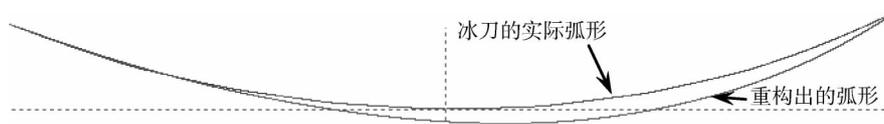


图3 基于小弧段切触法的重构弧形与冰刀实际弧形

1.2 基于曲率插值与拟合的迭代重构方法

上述方法重构冰刀弧形的效果不理想是因为:冰刀弧形的曲率是连续变化的,而不是在一个区域内恒定,到临界处突变.故假设冰刀弧形的曲率是按某种规律(线性或非线性关系)变化的,即曲率 k 是关于弧长 s 的线性或非线性函数.

本文提出的重构方法先使用小弧段切触法生成圆弧样条,得到曲率 k 与弧长 s 的初步关系,再对这个关系进行细化,然后通过虚拟测量的方法对这个对应关系进行修正,以获得更精确的曲率与弧长关系.当曲线上任意一点的曲率与对应的弧长已知时,那么这条曲线的形状就可以唯一确定.由小弧段切触法得到的曲率与弧长的关系如表1所示.

表1 曲率 k 与弧长 s 的对应表

| 点数 | 第1点 | 第2点 | 第3点 | 第4点 | 第5点 | 第6点 | 第7点 |
|----------|------------|------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 半径 R/m | 11.002 000 | 10.033 000 | 10.185 000 | 8.734 000 | 5.710 000 | 5.468 000 | 4.023 000 |
| 曲率 k | 0.090 893 | 0.099 671 | 0.098 184 | 0.114 495 | 0.175 131 | 0.182 882 | 0.248 571 |
| 弧长/mm | 30.003 700 | 90.011 850 | 150.020 700 | 210.030 900 | 270.050 600 | 330.079 500 | 390.094 500 |

由于表1给出的曲率与弧长的对应关系较少,为重构出相应的曲线,需要更多的曲率与弧长的关系,因此对上述列表进行插值,可得到任意 s 所对应的 k .选择抛物线插值与线性插值作为加密稀疏点的方法,再利用自生长造型方法重构出曲线^[2-4],且限制重构出的曲线首末两点的距离为460 mm.如图4所示,选

用抛物线插值重构出的曲线的最大误差为 0.414 mm,而选用线性插值重构出的最大误差为 0.319 mm.故选择线性插值较合理.

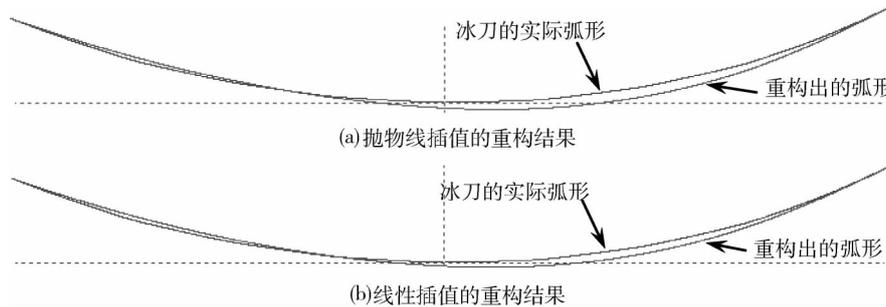


图4 改进方法重构出的弧形与实际弧形

为进一步提高重构的精度,故使用迭代修正的方法,即对重构出的曲线用弧度仪进行模拟测量,用模拟测量出的半径值与给定的半径值相比较,用其差值对下一次重构时所使用的曲率半径值进行修正,如此迭代多次,以获得理想的曲线.具体方法如下:

$R_i (i = 1, 2, \dots, 7)$ 是给定的半径值, $r_i^m(s)$ 是第 i 弧段第 m 次重构时所使用的曲率半径值, ρ_i^m 是第 i 弧段第 m 次模拟测量时得到的半径值.第 $i-1$ 模拟测量是在第 i 次测量之后,第 $i+1$ 次测量之前,故有

$$r_i^m(s) = r_i^{m-1}(s) + (R_i - \rho_i^{m-1}) \cdot \lambda, 0 < \lambda \leq 1 \text{ 且 } 1 \leq i \leq 7. \tag{1}$$

设 $E^m = \sum_{i=1}^7 |R_i - \rho_i^m|$, 迭代终止条件为

$$\left| \frac{E^m - E^{m-1}}{E^{m-1}} \right| \leq \varepsilon. \tag{2}$$

本文选择 $\lambda = 0.2 \sim 0.3$ 且 $\varepsilon = 0.001$.

从曲率信息中重构出冰刀弧形的步骤如下:

- 1) 首先根据弧度仪测得的弧度信息 δ_i 查表,换算得到对应的曲率 k_i 与半径 $R_i (i = 1, 2, \dots, n)$;
- 2) 根据半径 R_i 与弧度仪的跨距 L 计算出该圆弧段所对应的弧长 $\Delta S_i (i = 1, 2, \dots, n)$;
- 3) 根据 ΔS_i 计算出对应的 s_i 值,建立起曲率 k_i 与弧长 $s_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 的对应关系;
- 4) 利用线性插值对曲率 k_i 与弧长 $s_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 的关系进行细分,弧长 s 所对应的步长为 0.1 mm, 然后利用自生长造型方法对上述关系进行重构,得到曲线 Γ ;

5) 模拟测量曲线 Γ , 得到相应的曲率 ρ_i^m , 利用式(1)对上次重构所使用的曲率 $r_i^{m-1}(s)$ 进行修正,得到 $r_i^m(s)$, 再进行迭代重构,直至满足迭代终止条件即式(2).

使用上述迭代方法后重构出的曲线如图 5 所示,迭代 5 次后所得曲线在垂直方向上的最大误差为 0.274 mm,迭代 15 次后的最大误差为 0.2 mm.

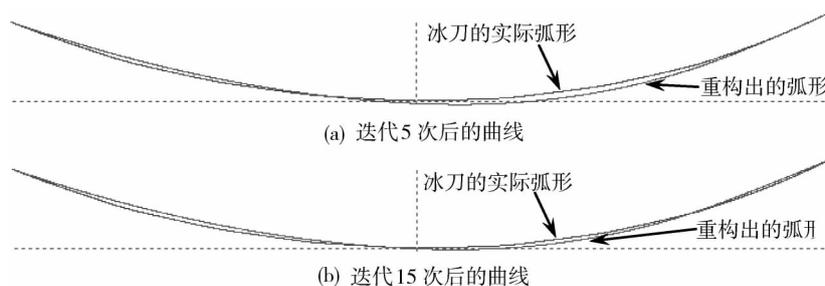


图5 改进方法附加迭代修正后重构出的曲线

2 冰刀弧形表达的简化

上述重构中关于弧长 s 所使用的步长为 0.1 mm, 重构所得的型值点数超过 4 600, 故需要简化弧形的表达, 本文采用圆弧样条拟合这些线段. 用圆弧样条逼近列表点曲线已有很多学者研究^[5-11], 这些研究主要以双圆弧为基础进行拟合. 在满足一定的拟合精度要求下, 本文从尽可能减少圆弧段数与加强计算稳定性等方面来改善圆弧样条拟合法.

2.1 圆弧样条的相关公式

如图 6 所示, 双圆弧在 A 和 B 上的切线为 T_A 和 T_B . C 是 T_A 和 T_B 的交点, α 和 β 分别是 T_A 和 T_B 与横轴的夹角, 逆时针方向为正; $-\pi < \alpha, \beta \leq \pi$. 双圆弧圆心和半径如下^[12]:

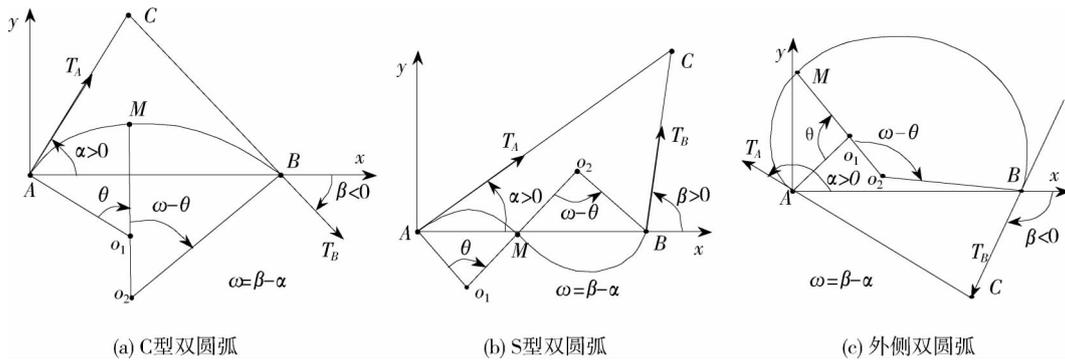


图 6 双圆弧类型

左圆:

$$x_1 = -r_1 \sin \alpha, y_1 = r_1 \cos \alpha; r_1 = \frac{\sin((\bar{\omega} + \theta)/2 + \alpha)}{2 \sin(\bar{\omega}/2) \sin(\theta/2)} |AB|. \quad (3)$$

右圆:

$$x_2 = |AB| - r_2 \sin \beta, y_2 = R_2 \cos \beta; r_2 = -\frac{\sin(\theta/2 + \alpha)}{2 \sin(\bar{\omega}/2) \sin((\bar{\omega} - \theta)/2)} |AB|. \quad (4)$$

公切点坐标:

$$x_M = \frac{\sin((\bar{\omega} + \theta)/2 + \alpha) \cos(\theta/2 + \alpha)}{\sin(\bar{\omega}/2)} |AB|, y_M = \frac{\sin((\bar{\omega} + \theta)/2 + \alpha) \sin(\theta/2 + \alpha)}{\sin(\bar{\omega}/2)} |AB|. \quad (5)$$

式中: $\bar{\omega} = \beta - \alpha$, 逆时针方向为正; $-\pi < \theta \leq \pi$, 当 $\alpha\beta < 0$ 时, $\theta = -\alpha$; 当 $\alpha\beta > 0$ 时, $\theta = -2\alpha - \frac{\bar{\omega}}{2}$.

2.2 对影响拟合误差的参数分析

先进行双圆弧拟合, 然后分析误差的分布特点, 根据分布特点调节 T_B 的方向, 圆心角 θ 与端点 B 的位置, 再进行双圆弧拟合, 不断循环, 使型值点与双圆弧的拟合误差都达到 e , 达到减少圆弧段数的目标. 定义一个点 P 到圆弧的误差为

$$e = d - r.$$

式中: d 为点 P 到圆心的距离; r 为圆弧的半径.

$e > 0$ 时误差为正, $e < 0$ 时误差为负. 假设双圆弧的两段圆弧分别为 $ArcA, ArcB$, 记点集到 $ArcA$ 的误差分别为 e_a^+ 与 e_a^- , 到 $ArcB$ 的误差分别为 e_b^+ , e_b^- .

1) θ 值的调整对误差分布的影响

$$\frac{d(r_1)}{d\theta} = -\frac{\sin((\alpha + \beta)/2)}{4 \sin(\bar{\omega}/2) \sin^2(\theta/2)} |AB|, \frac{d(r_2)}{d\theta} = -\frac{\sin((\alpha + \beta)/2)}{4 \sin(\bar{\omega}/2) \sin^2((\bar{\omega} - \theta)/2)} |AB|.$$

当 $|\theta|$ 增加时, $|r_1|$ 增加, $|r_2|$ 增加, $(e_a^+ + e_a^-)$ 减少, $(e_b^+ + e_b^-)$ 增加; 而当 $|\theta|$ 减少时, $|r_1|$ 减少,

$|r_2|$ 减少, $(e_a^+ + e_a^-)$ 增加, $(e_b^+ + e_b^-)$ 减少.

2) β 值的调整对误差分布的影响

$$\frac{d(r_1)}{d\beta} = -\frac{\sin(\alpha + \theta/2)}{4\sin(\theta/2) * \sin^2(\bar{\omega}/2)} |AB|, \quad \frac{d(r_2)}{d\beta} = \frac{\sin(\alpha + \theta/2) \sin(\bar{\omega} - \theta/2)}{4\sin^2(\bar{\omega}/2) \sin^2((\bar{\omega} - \theta)/2)} |AB|.$$

如图 7 所示, 当 $|\beta|$ 增加时, $|r_1|$ 增加, $|r_2|$ 减少, $(e_a^+ + e_a^-)$ 减少, $(e_b^+ + e_b^-)$ 减少; 而当 $|\beta|$ 减少时, $|r_1|$ 减少, $|r_2|$ 增加, $(e_a^+ + e_a^-)$ 增加, $(e_b^+ + e_b^-)$ 增加.

3) B 点位置的调整对误差分布的影响

$$\frac{d(x_M)}{d\beta} = -\frac{\sin(2\alpha + \theta)}{4\sin^2(\bar{\omega}/2)} |AB|, \quad \frac{d(y_M)}{d\beta} = -\frac{\sin^2(\alpha + \theta/2)}{2\sin^2(\bar{\omega}/2)} |AB|;$$

$$\frac{d(x_M)}{d\theta} = \frac{\cos((3\alpha + \beta)/2 + \theta)}{2\sin(\bar{\omega}/2)} |AB|, \quad \frac{d(y_M)}{d\theta} = \frac{\sin((3\alpha + \beta)/2 + \theta)}{2\sin(\bar{\omega}/2)} |AB|.$$

如图 8 所示, N_A 是 A 点处的法线, N_B 是 B 点处的法线. 当 B 点沿着 N_B 移动时, $(e_b^+ + e_b^-)$ 值的变化速度大于 $(e_a^+ + e_a^-)$ 值的变化速度, 即 ArcB 的误差分布所受的影响较大.

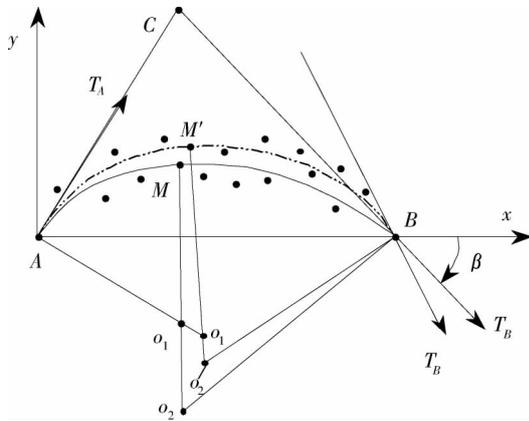


图 7 β 值的调整

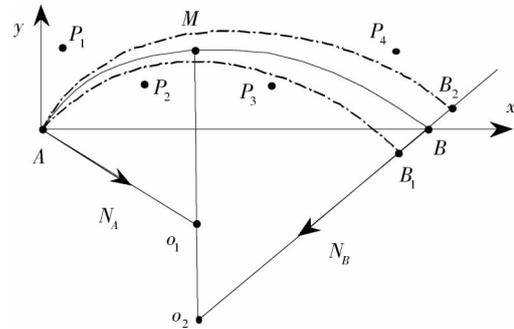


图 8 B 点位置的调整

2.3 圆弧样条拟合型值点集合的算法

2.3.1 型值点处切矢方向的确定

在平面上给定一组型值点集 $\{P_i\} (i=0, 1, \dots, n)$ 及边界条件后, 需要确定每个点的切矢方向, 通常采用 Bessel 方法^[13] 与秋间(Akima)方法^[13] 来确定切矢方向 $\{T_i\} (i=1, 2, \dots, n-1)$.

这 2 种方法实际上是取 P_i 处的切线斜率作为相邻两条弦线 $P_{i-1}P_i$ 与 P_iP_{i+1} 斜率的加权平均, 由于涉及斜率, 故会出现商为零的情况, 计算稳定性不是很好.

Bessel 分片三次插值函数的逼近阶是 $O(h^3)$ (当节点分布不均匀时), 而秋间分片三次插值函数的逼近阶只有 $O(h^2)$. 从逼近阶的差别大致可以估计到 Bessel 方法与秋间方法的光顺性不够理想.

插值三次样条函数的逼近阶是 $O(h^4)$, 在小挠度场合能相当好地逼近木样条而具有令人满意的光顺性. 但在数控加工中, 可能会遇到一些大挠度曲线(即 $|y'| > 1$ 的情况), 此时用三次样条逼近就可能使曲线走样, 而三次参数样条是解决大挠度曲线的一种较好的方法, 它能使拟合光顺, 且计算简单可靠.

综上所述, 应采用三次 B 样条曲线来拟合型值点集, 从而取得各型值点处的切矢方向.

2.3.2 用双圆弧样条曲线拟合型值点集合时

1) 对于点集 $\{P_i\} (i=0, 1, \dots, n)$ 及拟合误差 e , 用三次 B 样条曲线插值, 得到各型值点处的切矢方向 $T_i (i=0, 1, \dots, n)$.

2) i 的初始值为 0, j 的初始值为 1.

3) 根据 P_i 与 P_j 的坐标, T_i 与 T_j 的值, 计算出 α 与 β 的值. 根据圆弧类型选择合适的 θ 值, 然后双圆弧

插值,并计算出最大的逼近误差 $e_{\max} = \max\{e_a^+, -e_a^-, e_b^+, -e_b^-\}$.

4) 当 $e_{\max} \leq e$ 时,若 $j = n$, 则结束程序;否则, $j = j + 1$, 转到步骤3. 当 $e_{\max} > e$ 时, 则按拟合误差的分布情况进行下一步的处理.

5) 若 $(e_a^+ + e_a^-) * (e_b^+ + e_b^-) < 0$, 则需调整 θ 角的值.

6) 若 $(e_a^+ + e_a^-) * (e_b^+ + e_b^-) > 0$ 且 $\max(e_a^+, -e_a^-) > \max(e_b^+, -e_b^-)$, 则需调整 β 角的值.

7) 若 $(e_a^+ + e_a^-) * (e_b^+ + e_b^-) > 0$ 且 $\max(e_a^+, -e_a^-) < \max(e_b^+, -e_b^-)$, 则需调整端点 B 的位置.

8) 重新计算被拟合点群到双圆弧的逼近误差. 当 $e_{\max} < e$ 时, 若 $j = n$, 则结束程序; 否则, $j = j + 1$, 转到步骤3. 当 $e_{\max} > e$ 时, $j = j - 1, i = j$. 转到下一步.

9) 如果 $i = n - 1, j = n$, 进行双圆弧插值, 结束逼近过程; 否则继续进行下一对双圆弧的逼近计算, 即 $j = i + 1$, 转到步骤3.

2.4 冰刀弧形表达的简化结果

重构得到的点集经圆弧样条拟合(逼近误差为 5 μm)后, 简化为 6 段圆弧, “■”表示相邻圆弧段之间的分界, 如图9所示.

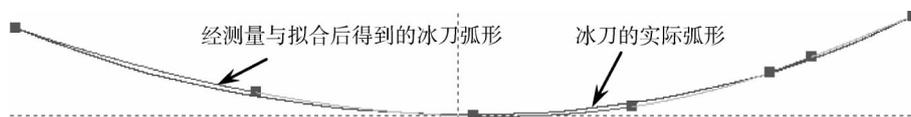


图9 冰刀弧形的简化结果

基于上述研究, 作者开发了华中文特数控冰刀弧形重构系统. 如图10所示, 可设置冰刀在水平方向的长度与弧度仪的跨距, 在红线下方的方框中可填入弧度仪采集到的弧度值(弧度仪的直接读数为弧度值, 由弧度值得到半径值需要经过查表换算), 并且可以改变弧顶高所在的点(图中红色方框表示)在水平方向的位置, 从而得到所需要的弧形, 系统输出的是经重构与简化后得到的圆弧样条各圆弧段的圆心坐标, 半径, 起点坐标, 终点坐标与弧长等信息.

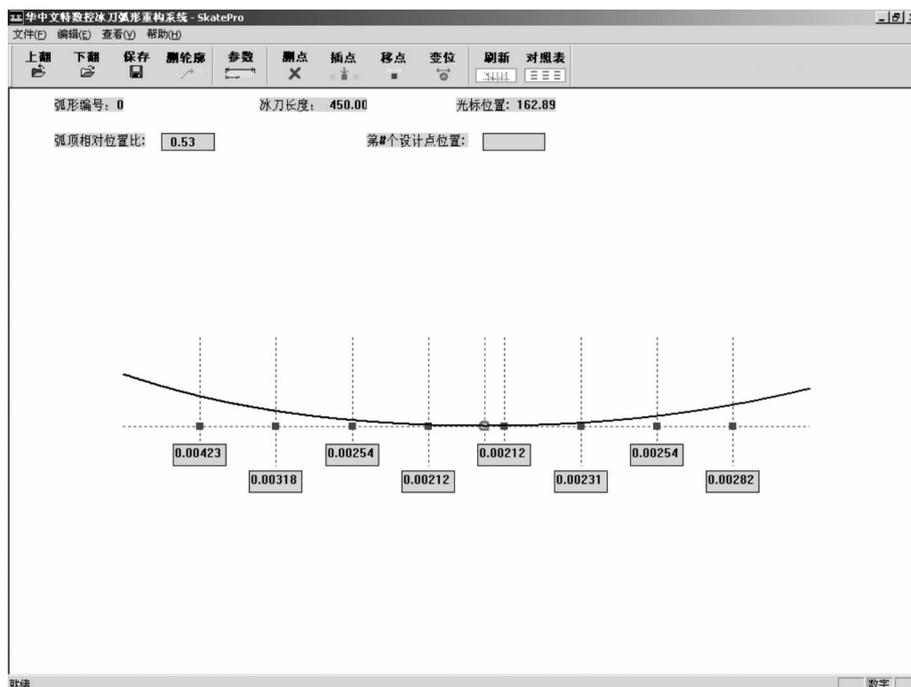


图10 华中文特数控冰刀弧形重构系统界面图

3 结论

采用弧度仪测量冰刀弧形,得到曲率数据,在重构时比较了常用的小弧段切触法与本文提出的基于曲率插值与拟合的迭代重构方法,得出如下结论:

1) 在重构精度方面,本文方法比小弧段切触法有明显的改进.

2) 由于冰刀弧形是一条曲率变化较平缓的曲线,因此采用圆弧样条来描述冰刀弧形具有较好的效果.本文通过调整圆弧样条的参数,有效地减少了圆弧段数,简化了弧形描述.

3) 由于弧度仪将跨距内的曲线近似于圆弧,存在原理上的误差,故基于弧度仪的冰刀弧形测量与重构方法在精度上受到限制.为得到较高的测量与重构精度,同时具备便捷的特点,需要探索新的冰刀弧形测量与重构方法.

参考文献:

- [1] 王简. 冰刀弧研磨系统的测量与加工技术研究[D]. 武汉: 华中科技大学, 2007.
- [2] 黄东兆, 周会成, 师汉民. 平面曲线的自生长造型[J]. 机械科学与技术, 2006, 25(9): 1062-1065.
- [3] 吴家麒, 杨东英, 沈林勇, 等. 基于曲率数据的曲线拟合方法研究[J]. 应用科学学报, 2003, 21(3): 258-262.
- [4] 沈赟, 张庆军. 基于离散曲率算法的锉刀杆变形曲线拟合[J]. 机械工程师, 2008(9): 123-125.
- [5] 王琦. 平面列表点曲线的最优双圆弧拟合[J]. 小型微型计算机系统, 1997, 18(8): 38-42.
- [6] Yong J H, Hu S M, Sun J G. Bisection Algorithm for Approximating Quadratic Bezier Curves by G^1 Arc Splines[J]. Computer-Aided Design, 2000, 32(4): 253-260.
- [7] Piegl L A, Tiller W. Biarc Approximation of NURBS Curves[J]. Computer-Aided Design, 2002, 34(11): 807-814.
- [8] Park H J. Error-Bounded biarc approximation of planar curves[J]. Computer-Aided Design, 2004, 36(12): 1241-1251.
- [9] Chen X D, Yong J H, Zheng G Q, et al. Automatic G^1 arc spline interpolation for closed point set[J]. Computer-Aided Design, 2004, 36(12): 1205-1218.
- [10] Yong J H, Chen X, Paul J C. An example on approximation by fat arcs and fat biarcs[J]. Computer-Aided Design, 2006, 38(5): 515-517.
- [11] 张驰, 陈锦昌, 申艺杰. 基于VB的优化双圆弧拟合误差分析[J]. 图学学报, 2014, 35(1): 1-5.
- [12] 阎童, 王琦. 双圆弧拟合在轮廓仿真加工中的应用[J]. 小型微型计算机系统, 1998, 19(10): 57-60.
- [13] 苏步青, 刘鼎元. 计算几何[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1981.