赵自豪,李鹏慧.最小径集求解方法及 Mathematica 实现[J].湖南科技大学学报(自然科学版),2022,37(2): 27-32. doi:10.13582/j.cnki.1672-9102.2022.02.005

ZHAO Z H, LI P H. Solutions to Minimum Path Sets and Its Implementation in Mathematica[J]. Journal of Hunan University of Science and Technology (Natural Science Edition), 2022,37(2): 27-32. doi:10.13582/j.cnki.1672-9102.2022.02.005

最小径集求解方法及 Mathematica 实现

赵自豪[1*],李鹏慧[1,2]

(1.内蒙古科技大学 矿业与煤炭学院,内蒙古 包头 014010;2.晋能控股集团北辛窑煤业公司,山西 忻州 034000)

摘　要:为了解决传统事故树最小径集求解过程中遇到的计算量大、专业化简软件缺乏、手工计算容易出错的问题,文章研究了现有 2 种最小径集求解方法,用图解的形式说明了这 2 种方法的求解路径,通过理论推导证明了最小割集和最小径集在事故树的表示上是等效的.在此基础上,提出了一种新的求解最小径集的方法并进行了证明.通过在 Mathematica 软件中建立基本的事故树化简规则,从而实现了事故树的软件自动化简,并通过实例验证,证明了文中所述 3 种最小径集求解方法的正确性和便捷性.

关键词:安全;Mathematica;事故树;布尔代数运算;最小径集

中图分类号:X928　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-9102(2022)02-0027-06

Solutions to Minimum Path Sets and Its Implementation in Mathematica

ZHAO Zihao[1], LI Penghui[1,2]

(1. School of Mine and Coal, Inner Mongolia University of Science and Technology, Baotou 014010, China;
2. Beixinyao Coal Industry Company, Jinneng Holding Group, Xinzhou 034000, China)

Abstract: There is difficulty encountered during the process of solving fault tree (FT) for its minimum path sets (MPS), for instance, the amount of calculation is large, the special simplification software is scarce, and the manual calculation is fallible. In order to overcome these problems, two known methods of obtaining MPS are researched, their solution paths are illustrated in form of diagram. According to all these above, by theoretical deriving, the representations of the FT by the minimum cut sets (MCS) and MPS are proved equivalent. Further, a new method for obtaining MPS is proposed and proved in this paper. Through establishing basic simplification rules in Mathematica, the method of automatically simplifying FT is implemented. Finally, correctness and convenience of these three methods of obtaining MPS are verified by examples.

Keywords: safety; Mathematica; fault tree; Boolean operation; minimum path sets

事故树分析的基础是求解事故树最小割集和最小径集,在此基础上可以直接提出防治事故发生的措施,也可以进一步运用各种方法计算基本事件的重要度,对安全生产的风险进行进一步的精细评估.刘堃等[1]利用危险度评估法对加氢站进行了爆炸事故后果严重性的评判,同时结合事故树分析理论,获得了加氢站爆炸事故的最小割集和最小径集;武欣等[2]对农机的使用领域进行了事故树分析,并将事故树的基本事件发生概率用模糊数表示,事故树中的逻辑门也引入了相应的模糊运算公式,从而让各种重要度的

收稿日期:2020-05-13　　**修改日期**:2022-03-25
基金项目:内蒙古自然科学基金资助项目(2019MS04016)
*通信作者,E-mail:phyzzh@imust.edu.cn

计算更贴近现实;韩梅等[3]基于事故树与模糊贝叶斯网络的相似性,将事故树映射到贝叶斯网络对铁路超限货物运输风险进行评估;台德清[4]利用事故树传统分析方法对火车脱轨事故进行了分析,并提出了防止调车脱轨事故的管理措施;王莉莉等[5]将事故树分析引入空中交通管制员情景意识丧失这一事故的分析中,获得了空中交通管制员情景意识丧失事故的发生路径,提出了预防措施,但其分析最终停留在结构重要度层面上;张加国等[6]对通风系统事故进行分析,结合最新的煤矿安全生产法和通风优化降阻措施,对通风事故的预防进行了系统总结;张园园等[7]对传统梯形模糊数事故树的预测问题进行了改进,通过改变表现定理和隶属度求解策略,降低了预测误差,与传统方法相比,该方法对基本事件数巨大的事故树的预测具有明显的优势.

综上所述,事故树分析领域的改进主要集中在事故树定量分析中的基本事件各种重要度的计算方法上,在事故树定性分析领域,没有明显的改进.本文以事故树传统定性分析方法为起点,针对求解最小径集这一问题,利用现有的布尔代数逻辑体系,构建最小径集求解方法之间的逻辑推理关系,提出新的最小径集求解方法,并利用 Mathematica 软件进行了验证.

最小径集的求取是事故树分析的重要手段,根据最小径集可以找出有效地防止事故发生的途径,评估事故发生的可能性[8-9].理论上,求取最小割集的方法同样适用于求解最小径集.目前,常用的求解最小割集的方法分为上行法和下行法 2 大类[10-12].下行法是从顶事件开始,把各个逻辑门下的事件按一定规则进行置换,直到不含中间事件为止,然后利用逻辑规则进行化简,常用的下行法有矩阵法以及衍生出来的数值法等.上行法是从基本事件开始,按逻辑规则写出表达式,然后按布尔代数或集合规则进行化简和处理,常用的上行法有结构法和布尔代数法.除了上行法和下行法 2 大类方法之外,求解最小割集的方法还有关联矩阵法、串并联系统法等,这些方法要么在数学上晦涩难懂,要么由于基本事件的重复出现导致连接混乱,没有得到大面积的应用[11-12].

长期以来,由于逻辑推理软件的开发滞后,导致求取割集的方法中下行法占主要地位.随着 Mathematica 等代数推理软件的发展,上行法的运用逐渐成为可能.本文仅针对利用布尔代数法求解最小径集进行展开.常用的布尔代数法有以下 3 种:

1)常见的事故树与对偶的成功树如图 1 所示.将事故树 FT 对偶变换为成功树 ST,求取出成功树的最小割集,这个最小割集就是事故树的最小径集.这是最传统的做法,具体实现如下:

利用该方法时,先写出图 1a 所示的事故树的表达式:

$$T=M_1+M_2=X_1M_3X_2+X_4M_4=X_1(X_1+X_3)X_2+X_4(X_4X_5+X_6). \tag{1}$$

式中:T 为事故树的顶事件;$M_1 \sim M_4$ 为事故树的中间事件;$X_1 \sim X_6$ 为事故树的基本事件.

将式(1)对偶转换为成功树的表达式,然后化解为最简形式:

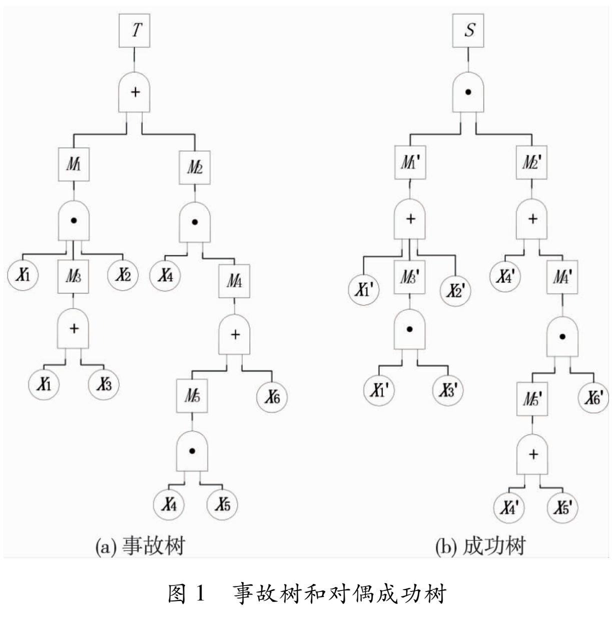

图 1 事故树和对偶成功树

$$S=(X_1'+X_1'X_3'+X_2')[X_4'+(X_4'+X_5')X_6']=X_1'X_4'+X_2'X_4'+X_1'X_5'X_6'+X_2'X_5'X_6'.$$

式中:S 为成功树的顶事件;$X_1'\sim X_6'$为成功树的基本事件.

很显然,此成功树有 4 个最小割集,分别为

$$\boldsymbol{G}_1=\{X_1',X_4'\},\boldsymbol{G}_2=\{X_2',X_4'\},\boldsymbol{G}_3=\{X_1',X_5',X_6'\},\boldsymbol{G}_4=\{X_2',X_5',X_6'\}.$$

式中:$\boldsymbol{G}_1$, $\boldsymbol{G}_2$, $\boldsymbol{G}_3$, $\boldsymbol{G}_4$ 为成功树 ST 的最小割集.

将 S 的最简形式对偶变换为事故树表达式:$T=(X_1+X_4)(X_2+X_4)(X_1+X_5+X_6)(X_2+X_3+X_6)$,则事故树的最小径集分别为

$$\boldsymbol{P}_1=\{X_1,X_4\},\boldsymbol{P}_2=\{X_2,X_4\},\boldsymbol{P}_3=\{X_1,X_5,X_6\},\boldsymbol{P}_4=\{X_2,X_5,X_6\}.$$

式中:$\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$, $\boldsymbol{P}_3$, $\boldsymbol{P}_4$ 为事故树 FT 的最小径集.

2)直接用布尔代数的运算法则求解最小径集,又称直接展开法.表 1 列出了事故树运算中用到的布尔代数运算法则,其中,a 形式的法则和 b 形式的法则互为对偶.这种方法的缺点是在执行分配率的时候,大家对于分配率习惯的是 a 形式,而这里需要不断执行分配率的 b 形式,b 形式这种法则不符合多数人的逻辑思维习惯.随着运算复杂度的增加,在进行手工计算时,出错的概率大大增加[13].

3)采用对偶变换,将事故树的最小割集变换为成功树的最小径集,通过布尔代数运算进行化简,将该最小径集变换为最小割集的形式,再对偶变换回事故树的最小径集.这种方法是最容易操作的办法[14-17].

本文对以上 3 种方法的理论依据进行说明,并对第 2 种和第 3 种方法利用 Mathematica 进行了直接求解,给出了所用的求解命令.

1　事故树分析的布尔代数基础

1.1　布尔代数运算规则

布尔代数运算规则如表 1 所示.从表 1 可以看出:所有的运算规则的 a 形式和 b 形式互为对偶变换.

表 1　布尔代数运算规则

规则名称	a 形式	b 形式	备注
交换律	$A\times B=B\times A$	$A+B=B+A$	
结合律	$A\times B\times C=(A\times B)\times C=A\times(B\times C)$	$A+B+C=(A+B)+C=A+(B+C)$	
分配率	$A\times(B+C)=A\times B+A\times C$	$A+B\times C=(A+B)\times(A+C)$	专用
等幂率	$A\times A=A$	$A+A=A$	
吸收律	$A+A\times B=A$	$A\times(A+B)=A$	

1.2　事故分析过程中用到的概念

定义 1　对偶变换:若对几个基本事件的关系式 i 进行改写,与门变或门,或门变与门,且原来基本事件的运算顺序不变,得到关系式 j,这个过程称为对偶变换.i 和 j 互为对偶,记为 $i<=>j$.

定义 2　成功树:若将事故树 FT 进行对偶变换,获得的树状图或表达式称为成功树 ST.由定义 1 可知:ST<=>FT.

定义 3　对偶化简(还原):若同一顶上事件的事故树和成功树在化简(还原)的过程中,若一方选用表 1 中的 a 形式,则另一方选用 b 形式,反之亦然.这种化简(还原)方式为对偶化简(还原).

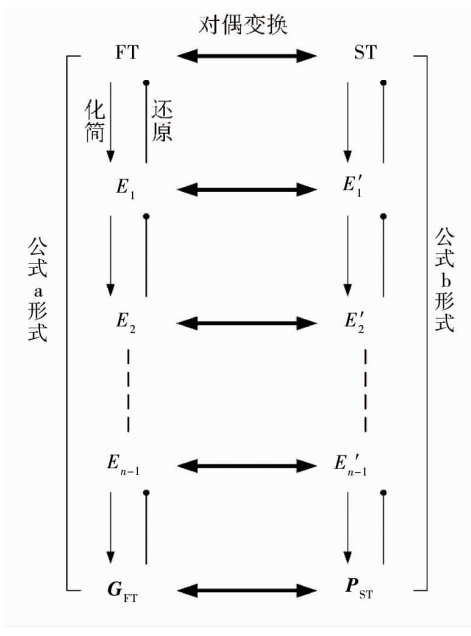

图 2　事故树和成功树的推导关系

图 2 中列出了事故树和成功树的化简、还原过程及其基本事件、子步和最小割集之间的相互对偶关系.在图 2 中,左右 2 个过程互为对偶化简(还原),$E_1\sim E_{n-1}$, $E_1'\sim E_{n-1}'$为化简或还原过程中每个子步所获得的表达式,$\boldsymbol{G}_{FT}$为事故树的最小割

集,$\boldsymbol{P}_{\mathrm{ST}}$为成功树的最小径集.

1.3 事故树求解过程中的几个相关推论

推论 1 最小割集和最小径集的求解过程是可逆的,且最小割集与最小径集等效.

记 $S_{m_n}^{(n)}$ 为事故树的化简算子,$R_{m_n}^{(n)}$ 为事故树的还原算子,其中 n 为化简或还原的子步,$n \in \mathbf{N}$, $\mathbf{N}$ 为自然数集. m_n 为第 n 次化简或还原时所用到的运算规则,根据具体情况在表 1 中灵活选取.在每个公式中,如果执行化简算子,按从左到右的格式进行变换,反之,如果执行还原算子,按从右到左的格式进行变换.记 $\boldsymbol{G}$ 为最小割集,$\boldsymbol{P}$ 为最小径集,FT 为事故树原始表达式,则最小割集和最小径集的求取可表示为

$$S_{m_{\max}}^{(\max)}\left(S_{m_{\max-1}}^{(\max-1)}\left(\cdots S_{m_2}^{(2)}\left(S_{m_1}^{(1)}(\mathrm{FT})\right)\cdots\right)\right) \overset{\mathrm{a}}{=} \boldsymbol{G};$$

$$S_{m_{\max}}^{(\max)}\left(S_{m_{\max-1}}^{(\max-1)}\left(\cdots S_{m_2}^{(2)}\left(S_{m_1}^{(1)}(\mathrm{FT})\right)\cdots\right)\right) \overset{\mathrm{b}}{=} \boldsymbol{P}.$$

式中:a,b 分别为执行表 1 中运算规则的 a 形式和 b 形式;max 为 n 所取的最大值.

反之,根据 $\boldsymbol{G}$ 和 $\boldsymbol{P}$ 可以用还原算子反推得到事故树的原始表达式 FT.

$$R_{m_1}^{(1)}\left(R_{m_2}^{(2)}\left(\cdots R_{m_{\max-1}}^{(\max-1)}\left(R_{m_{\max}}^{(\max)}(G)\right)\cdots\right)\right) \overset{\mathrm{a}}{=} \mathrm{FT};$$

$$R_{m_1}^{(1)}\left(R_{m_2}^{(2)}\left(\cdots R_{m_{\max-1}}^{(\max-1)}\left(R_{m_{\max}}^{(\max)}(P)\right)\cdots\right)\right) \overset{\mathrm{b}}{=} \mathrm{FT}.$$

不同的是,还原算子的每一个子步是参照化简算子的同编号子步,按照表 1 中的规则从右向左进行还原.

由以上推导可知:事故树无论是表示成最小割集形式,还是表示成最小径集形式,均可以还原为原始事故树,故最小割集和最小径集是等效的.记为

$$\boldsymbol{G}_{\mathrm{FT}} \cong \boldsymbol{P}_{\mathrm{FT}}, \boldsymbol{G}_{\mathrm{ST}} \cong \boldsymbol{P}_{\mathrm{ST}}.$$

式中:$\boldsymbol{G}_{\mathrm{FT}}$为事故树的最小割集;$\boldsymbol{P}_{\mathrm{FT}}$为事故树的最小径集;$\boldsymbol{G}_{\mathrm{ST}}$为成功树的最小割集;$\boldsymbol{P}_{\mathrm{ST}}$为成功树的最小径集.

推论 2 事故树和成功树对偶化简(还原)的过程中,成功树的每一个子步均可由事故树的对应子步经过对偶变换获得,反之亦然.

考虑事故树和成功树的对偶性、化简过程中所用公式的对偶性以及对偶化简的定义,此推论不言自明.在推论 2 的基础上,自然得出推论 3.

推论 3 成功树的最小割集就是对应事故树的最小径集,反之亦然.记为 $\boldsymbol{G}_{\mathrm{FT}} <=> \boldsymbol{P}_{\mathrm{ST}}$,$\boldsymbol{G}_{\mathrm{ST}} <=> \boldsymbol{P}_{\mathrm{FT}}$.

推论 4 事故树的最小割集进行对偶变换后,求得的最小割集,再进行对偶变换,得到原始事故树的最小径集.

由推论 3 可知 $\boldsymbol{G}_{\mathrm{FT}} <=> \boldsymbol{P}_{\mathrm{ST}}$,$\boldsymbol{G}_{\mathrm{ST}} <=> \boldsymbol{P}_{\mathrm{FT}}$, 又由推论 1 可知 $\boldsymbol{G}_{\mathrm{ST}} \cong \boldsymbol{P}_{\mathrm{ST}}$, 因此, $\boldsymbol{G}_{\mathrm{FT}} <=> \boldsymbol{P}_{\mathrm{ST}} \cong \boldsymbol{G}_{\mathrm{ST}} <=> \boldsymbol{P}_{\mathrm{FT}}$, 故推论 4 得证.在此基础上,方法 1 和方法 3 的正确性由推论 3 和推论 4 可知.

2 利用 Mathematica 求解最小径集的基本原理

Mathematica 软件是由 Wolfram 公司开发的科学计算软件,该软件长于公式推导,是目前最为流行的符号运算软件之一.该软件除了内置的常用数学运算规则之外,还允许用户自定义运算规则.用户可以灵活地利用表达式、列表等数据结构,配合相关函数进行表达式的形式变换[18].

2.1 表达式在 Mathematica 中的数据结构

作为一种以符号运算见长的数学软件,Mathematica 与其他数值处理软件不同的是,其变量可以不依赖于具体数据而存在,即变量可以存储具体的数值,也可以单独存在.这是 Mathematica 可以实现公式变换的基础.

表是 Mathematica 中的基本数据结构,它可以实现数值、变量、算式或对象等的混合存储,即同一个表中的成员可以是不同类型的数据,表内的成员还可以是一个表,矩阵、表达式的存储就是通过这种方式实现的.

在 Mathematica 中,形如 $L_{\mathrm{T}}=(X_1+X_2X_3)(X_4+X_5)$ 的数据称为表达式,在软件中表达式的存储形式为 $L_{\mathrm{T}}=\mathrm{Times}[\mathrm{Plus}[X_1, \mathrm{Times}[X_2, X_3]], \mathrm{Plus}[X_4, X_5]]$(注:这是 Mathematica 软件的语法格式).

这个数据结构分为 2 部分:第 1 部分是形如{{X_1,{X_2,X_3}},{X_4,X_5}}的表,按照不同的层次存储了表达式要处理的变量名,{X_1,{X_2,X_3}}和{X_4,X_5}为列表 L_T 的子表,为第 1 层,而{X_2,X_3}作为{X_1,{X_2,X_3}}的子表,为第 2 层.Mathematica 可以指定运算规则作用于第几层;第 2 部分是形如 Times, Plus 的数据,称为列表的头,代表对列表内的变量进行的运算或操作,按对应列表的不同的层次对变量进行处理.综上所述,在 Mathematica 中,表达式是作为加上头的列表处理的.

2.2　Mathematica 公式推导的实现原理

公式推导的本质都是根据固有的运算规则进行表达式、变量或数据的代换.Mathematica 已经内置了常见的运算规则.但是对于分配率中的 b 形式,Mathematica 中没有内置的运算规则,为了利用事故树的直接展开法求最小径集,需要自建这一类的运算规则.

在 Mathmatica 中,为了区别于系统中内置的运算规则,自建运算规则又称为非自动使用的变换规则.其语法格式为

表达式/.规则表 对表达式按照规则表中的规则进行一次变换.

表达式//.规则表 对表达式按照规则表中的规则反复变换,直到没有能变换的表达式为止.

分配率的 b 形式可以写为

L_{FT}= L_{FT}//.x_+y_ * z_:>(x+y) * (x+z).|

式中:x_表明 x 为表达式,而不仅仅是变量;:>的左边是规则的原始形式,右边是规则的替换形式,且表达式不立即求值.

同理,对于等幂律的 a 形式,按照 Mathematica 的内置规则,会处理成 $A*A=A^2$.在进行布尔运算时,仅需设计替换规则将幂去掉即可.其规则可书写为

L_{FT}= L_{FT}//. x_^y_ :> x /; IntegerQ[y].

式中:/;表示其后跟的是规则使用的限定条件;IntegerQ[y]为一个函数,用以判断 y 是否是一个整数.

其他运算规则的 Mathematica 表述不再赘述.

2.3　提高公式推导速度的途径

用以上介绍的规则编写的命令进行公式推导时,由于规则替换对象的不确定性,Mathematica 需要花费很多的时间去搜寻符合条件的替换对象.因此,当表达式较长时,运算会变得非常缓慢,此时有 2 种方式可供提高运算速度.

1)利用编程的方式,明确其中的一个表达式.

该方法可以减少规则中表达式的量,从而起到加快运算速度的作用.如吸收律的 b 形式,可以写成如下所示的程序块.具体语法规则不再赘述.

m=Length[L_{FT}], n=m-0.5;

While[n<m, For[i=1,i<Length[L_{FT}], i++, L_{FT}= L_{FT}/.(L_{FT}[[i]]+x_) * L_{FT}[[i]]:> L_{FT}[[i]]]];

m=n; n=Length[L_{FT}]].

2)指定规则作用于某个特定层.

该方法同样也可以减少 Mathematica 的搜索量,从而加快替换速度.指定层替换一般用函数 Replace 来实现.如等幂律的 b 形式可以用如下的形式来实现:

L_{FT}=Replace[L_{FT}, x_ * y_:>x/; NumericQ[y],{2}].

式中:L_{FT}为表达式;x_ * y_:>x/; NumericQ[y]为替换规则;{2}为指定替换规则作用的层.

3　计算过程

以图 1 所示的事故树为例,在 Mathematica 中新建一个笔记本,按如下格式进行输入:

$L_{FT}=M_1+M_2$; $M_1=X_1*M_3*X_2$; $M_2=X_4*M_4$; $M_3=X_1+X_3$; $M_4=M_5+X_6$; $M_5=X_4*X_5$

输入完毕后,按 Shift+Enter 键进行运算,下同.键入 L_{FT}并执行,可得

$$L_{FT}=X_1X_2(X_1+X_3)+X_4(X_4X_5+X_6). \tag{2}$$

将表1中的布尔代数运算规则分别在Mathematica中写出,并对式(2)进行展开和化简工作.

1)分配率只采用b形式,其他规则视具体情况灵活选用,最终的计算结果:

$$\boldsymbol{P}_{\mathrm{FT}}=(X_1+X_4)(X_2+X_4)(X_1+X_5+X_6)(X_2+X_5+X_6). \tag{3}$$

2)分配率只采用a形式,其他规则视具体情况灵活选用,最终的计算结果:

$$\boldsymbol{G}_{\mathrm{FT}}=X_1X_2+X_4X_5+X_4X_6. \tag{4}$$

将式(3)写成对偶形式:

$$\boldsymbol{P}_{\mathrm{ST}}=(X_1+X_2)(X_4+X_5)(X_4+X_6). \tag{5}$$

对式(4)只采用分配率的a形式进行化简,最终的计算结果:

$$\boldsymbol{G}_{\mathrm{ST}}=X_1X_4+X_2X_4+X_1X_5X_6+X_2X_5X_6. \tag{6}$$

很显然,式(3)是采用直接展开法得到的事故树的最小径集.式(4)~式(6)展示了先求事故树的最小割集,然后对偶变换为成功树,再求成功树的最小割集的过程.式(5)也是原事故树的最小径集.式(3)和式(6)很显然是等效的.

综上所述,求解事故树最小径集的第2种和第3种方法得到了实例验证.

4 结论

1)事故树运算规则a形式和b形式具有对偶性,事故树和成功树的定义具有对偶性,最小割集和最小径集的定义具有对偶性,事故树和它的最小割集之间的运算具有可逆性.基于以上特征,文中所述3种求解事故树最小径集的方法可以互相导出,从而证明了这3种方法的正确性.

2)通过一个实例直接展示了利用Mathematica软件通过逻辑推理的办法求解事故树的最小径集的可行性.

参考文献:

[1] 刘堃,杨晓冬,戴超.基于危险度评价和事故树分析的加氢站安全风险研究[J].中国安全生产科学技术,2021,17(s1):50-55.

[2] 武欣,戚彬,孙晓明,等.基于模糊事故树的农机事故影响因素分析[J].中国农机化学报,2022,43(1):211-218.

[3] 韩梅,吴珊,常青,等.基于事故树和模糊贝叶斯网络的铁路超限货物运输风险评估[J].铁道学报,2021,43(5):9-17.

[4] 台德清.浅谈事故树在铁路调车脱轨事故分析中的应用[J].铁道运输与经济,2021,43(3):117-121.

[5] 王莉莉,朱敏.基于事故树的空中交通管制员情景意识分析[J].安全与环境学报,2021,21(1):249-256.

[6] 张加国,张庆财.运用风险事故树分析矿井通风系统安全性[J].煤炭科学技术,2020,48(s2):169-173.

[7] 张园园,孙麟,刘明.梯形模糊事故树预测算法的改进及应用[J].中国安全科学学报,2020,30(11):156-161.

[8] 彭霜霜,王洪春.基于因果图最小割集和最小径集在故障系统中的诊断[J].南京师范大学学报(工程技术版),2015,15(3):60-63.

[9] Kvassay M, Levashenko V, Zaitseva E. Analysis of minimal cut and path sets based on direct partial Boolean derivatives[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical-Engineers, 2016, 230(2):147-161.

[10] Endharta A J, Yun W Y, Ko Y M. Reliability evaluation of circular k-out-of-n: G balanced systems through minimal path sets[J]. Reliability Engineering and System Safety,2018,180: 226-236.

[11] 汪元辉.安全系统工程[M].天津:天津大学出版社,2004.

[12] 张景林,崔国璋.安全系统工程[M].北京:煤炭工业出版社,2009.

[13] 刘绘珍,张力,王以群,等.故障树中最小割集和最小径集的改进算法[J].工业安全与环保,2006(4):58-59.

[14] 木拉里·马扎甫,陆卫东,王悦.基于最小割集求解最小径集的方法研究[J].煤炭技术,2017,36(8):302-304.

[15] 代张音.煤矿复杂事故树最小径集算法研究[J].工业安全与环保,2015,41(2):44-45.

[16] 袁昌明.事故树分析中最小割集、最小径集的计算机求解[J].中国计量学院学报,2002(4):53-55.

[17] Alsharify F, Mudhar G A, Hassan Z. A modified technique to compute the minimal path sets for the reliability of complex network[J]. Journal of Physics: Conference Series, 2021, 1999(1): 012083.

[18] 丁大正.Mathematica基础与应用[M].北京:电子工业出版社,2013.