刘俞希,龚日朝,刘香伶.非对称鹰鸽博弈均衡解稳定性及其应用[J].湖南科技大学学报(自然科学版), 2023,38(1):105-115. doi:10.13582/j.cnki.1672-9102.2023.01.014
LIU Y X, GONG R Z, LIU X L. On the Stability of Equilibrium Solution of Asymmetric Hawk-Dove Game and Its Application[J]. Journal of Hunan University of Science and Technology (Natural Science Edition) , 2023, 38(1):105-115. doi:10.13582/j.cnki.1672-9102.2023.01.014

非对称鹰鸽博弈均衡解稳定性及其应用

刘俞希,龚日朝*,刘香伶

(湖南科技大学 商学院,湖南 湘潭 411201)

摘　要:鹰鸽博弈模型是刻画动物世界或人类社会竞争与冲突等行为决策的经典模型.考虑博弈双方实力差距对均衡解的影响问题,构建一个新的支付矩阵.运用演化博弈理论研究发现:鹰鸽博弈 Nash 均衡解的存在性与稳定性由参与双方的实力差距、成本收益率和博弈初始状态组合等因素之间的相依关系决定.由此揭示了人类社会面对竞争与冲突时的“人为财死,鸟为食亡”自然现象,以及人类社会理性人的“量力而行”与“见机行事”等行为特征,并给出了如何“量力”与如何“见机”的决策模型和判断依据.

关键词:实力差距;鹰鸽博弈;Nash 均衡;稳定性

中图分类号:F276.4　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-9102(2023)01-0105-11

On the Stability of Equilibrium Solution of Asymmetric Hawk-Dove Game and Its Application

LIU Yuxi, GONG Rizhao, LIU Xiangling

(School of Business, Hunan University of Science and Technology, Xiangtan 411201, China)

Abstract: The Hawk-Dove model is a classic model that portrays behavioral decisions such as competition and conflict in the animal world or human society. Considering the influence of the strength gap between the two sides of the game on the equilibrium solution, a new payoff matrix is constructed. Based on the evolutionary game theory, the study finds that the existence and stability of the Nash equilibrium solution of the game are determined by the interdependence between the player's strength gap, the cost-return rate, and the initial state of the game. These reveal the natural phenomenon of the fact that “people die for wealth, while birds die for food” in the face of competitive conflicts in human society, and the behavioral characteristics of rational people in human society such as “operating within their capabilities” and “acting at opportunities”, and gives the suggestions of how to “measure the capabilities” and “identify the opportunities”.

Keywords: strength gap; Hawk-Dove game; Nash equilibrium; stability

鹰鸽博弈起源于两物种为争夺或瓜分某资源而展开的对抗,是刻画动物世界种群间竞争与冲突的经典模型[1].该模型最初由英国进化生物学家 Smith 和 Price(1973)提出,假设博弈参与者均具有“鹰(Hawk)”和“鸽(Dove)”这 2 个策略,“鹰”策略表示采用“战斗”的方式“攻击对方”以获取资源;而“鸽”

收稿日期:2022-03-08
基金项目:国家社会科学基金资助项目(20BGL299)
* **通信作者**,E-mail: grzh661205@163.com

策略则表示采用“非战斗”的方式“退让对方”以放弃资源或“和平共享”地分割资源[2].近年来,鹰鸽博弈模型被广泛应用于人类社会竞争与冲突的行为决策问题研究[1-12].

但是,现实中博弈双方在经济、技术、人力以及信息等方面的实力往往存在差异,这就决定了传统鹰鸽博弈中参与人“势均力敌”的假设太粗糙.为此,一些学者将参与人的实力差异信息纳入鹰鸽博弈分析框架,提出非对称型鹰鸽博弈模型.采用的技术手段可归纳为 2 种:一是在“鹰”和“鸽”2 个策略的基础上添加表示不对称性的虚拟策略,通过策略组合的利益分配规则,将参与人实力的非对等性转化为对等[13-17],将非对称鹰鸽博弈转化为对称鹰鸽博弈;二是直接设置参与人的实力系数,将其纳入相应策略组合下的收益设置[18-25].其中,应用较为广泛的技术路线为用 v 表示被争夺资源总价值,c 表示对抗总成本,k 表示参与人 1 的实力系数,在 $v < c$ 条件下构建双方同时采用“鹰”策略的利益分配组合 $\{(v-c)/(4k), (v-c)/(4(1-k))\}$,显然双方利益均为负值.这一构建呈现了一方实力越大,则受到伤害越小的客观特征.但不难发现,发生对抗后总的利益为负 ($v < c$) 不等同于双方利益均为负,现实中实力强的参与人也有可能获得正利益.据此,本文对该模型进行修正,构建新的非对称鹰鸽博弈模型,探讨影响博弈均衡的相依条件及均衡解的群体演化规律,解决现实资源争夺中最优决策行为的选择问题.

1 非对称鹰鸽博弈模型的构建

考虑具有不同实力的参与人 A 和参与人 B 争夺(或瓜分)某种资源,资源的总价值为 v,双方均采用“鹰”和“鸽”2 个策略.假设博弈实力用博弈双方发生冲突时获胜的概率进行刻画,则 A 与 B 的实力差距(用 α 表示)即为双方获胜的概率之差,显然 $-1 \leqslant \alpha \leqslant 1$.如果 $0 < \alpha \leqslant 1$,则说明参与人 A 比参与人 B 实力强;如果 $-1 \leqslant \alpha < 0$,则说明参与人 A 比参与人 B 实力弱.如果 $\alpha = 0$,说明实力均衡.不失一般性,下文通篇规定 $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$,即参与人 A 比 B 实力强或者均衡.据此进一步给出如下几个假设:

假设 1:假设双方同时采用“鹰”策略的对抗总成本为 c,$c > 0$.但如果有一方采用“鸽”策略,此时双方不会发生对抗,无需付出对抗成本.

假设 2:假设双方均采用“鸽”策略,则按照各自实力大小分享总收益 v,即 A 的收益为 $(1+\alpha)v/2$,B 的收益为 $(1-\alpha)v/2$,满足实力越强,收益越大的原理.但如果只有一方采用“鸽”策略,则采用“鹰”策略的一方独占全部收益 v.

假设 3:如果双方同时采用“鹰”策略,则都要付出相应的对抗成本,假设 A 的对抗成本为 $(1-\alpha)c/2$,B 的对抗成本为 $(1+\alpha)c/2$,即双方按对方的实力系数分担总成本 c.

根据上述假设,考虑参与人实力差距的鹰鸽博弈支付矩阵如表 1 所示.可以看出,参与人 A 的净利益是 α 的单调递增函数.特别地,当 $\alpha = 0$ 时正是对称鹰鸽博弈支付矩阵.同时不难发现,该支付矩阵满足:

1)双方采用“鹰”策略时,双方净利益之和等于总利益减去总对抗成本.

2)在 $v < c$ 情形下,如果双方同时采用“鹰”策略,则当实力差距达到一定程度,强者完全有可能获得正利益.只有强者与弱者实力相差不大,即 $0 \leqslant \alpha < (c-v)/(v+c)$ 时,双方的净利益才均为负,也就是“两败俱伤”;否则,当强者与弱者实力差距较大,即 $\alpha \geqslant (c-v)/(v+c)$ 时,强者的净利益非负.

3)在 $v \geqslant c$ 情形下,双方同时采用“鹰”策略时,本文所构建的支付矩阵还揭示了如果双方实力相差到一定程度,即 $\alpha > (v-c)/(v+c)$,则实力弱者同样可能获得负利益,即“受伤”;只有当双方实力相差不太大,即 $0 \leqslant \alpha \leqslant (v-c)/(v+c)$ 时,双方的净利益才均为正.

表 1 考虑参与人实力差距的鹰鸽博弈支付矩阵

		参与人 B	
		鸽(D)	鹰(H)
参与人 A	鸽(D)	$\frac{1+\alpha}{2}v, \frac{1-\alpha}{2}v$	$0, v$
	鹰(H)	$v, 0$	$\frac{1+\alpha}{2}v-\frac{1-\alpha}{2}c, \frac{1-\alpha}{2}v-\frac{1+\alpha}{2}c$

2 Nash 均衡解求解

根据支付矩阵表 1,假设参与人 A 和参与人 B 采用“鸽”策略的概率分别为 p 和 q, 采用“鹰”策略的概率分别为 $1-p$ 和 $1-q$, 则参与人 A 和参与人 B 的期望效用分别为

$$E_{\mathrm{A}}(p,q)=\frac{1+\alpha}{2}vpq+(1-p)\left[qv+(1-q)\left(\frac{1+\alpha}{2}v-\frac{1-\alpha}{2}c\right)\right];\tag{1}$$

$$E_{\mathrm{B}}(p,q)=\frac{1-\alpha}{2}vqp+(1-q)\left[pv+(1-p)\left(\frac{1-\alpha}{2}v-\frac{1+\alpha}{2}c\right)\right].\tag{2}$$

根据式(1)和式(2),分别对 p 和 q 求偏导,得到

$$\frac{\partial E_{\mathrm{A}}(p,q)}{\partial p}=\left(\alpha v-\frac{1-\alpha}{2}c\right)q-\left(\frac{1+\alpha}{2}v-\frac{1-\alpha}{2}c\right)\equiv A_1q-A_0;\tag{3}$$

$$\frac{\partial E_{\mathrm{B}}(p,q)}{\partial q}=-\left(\alpha v+\frac{1+\alpha}{2}c\right)p+\left(\frac{1+\alpha}{2}c-\frac{1-\alpha}{2}v\right)\equiv -B_1p+B_0.\tag{4}$$

式中: $A_1=\alpha v-\frac{1-\alpha}{2}c$; $A_0=\frac{1+\alpha}{2}v-\frac{1-\alpha}{2}c$; $B_1=\alpha v+\frac{1+\alpha}{2}c$; $B_0=\frac{1+\alpha}{2}c-\frac{1-\alpha}{2}v$.

很容易证明如下引理:

引理 1　对于给定的博弈参与人实力差距 α, 争夺的总收益 v 和对抗的总成本 c, 有

1)对任意的 $\alpha\in[0,1]$, 有 $A_1\leqslant A_0, B_1>B_0$ 恒成立,当且仅当 $\alpha=1$ 时 $A_1=A_0$;

2)在 $v\geqslant c$ 的条件下,则

①$\begin{cases}A_1<0, & 当\ \alpha\in[0,c/(2v+c));\\ A_1=0, & 当\ \alpha=c/(2v+c);\\ A_1>0, & 当\ \alpha\in(c/(2v+c),1].\end{cases}$

②$\begin{cases}A_0>0, & 当\ \alpha\in[0,1],v>c;\\ A_0=0, & 当\ \alpha=0,v=c.\end{cases}$

③ $B_1>0$,　对任意的 $\alpha\in[0,1]$;

④$\begin{cases}B_0<0, & 当\ \alpha\in[0,(v-c)/(v+c));\\ B_0=0, & 当\ \alpha=(v-c)/(v+c);\\ B_0>0, & 当\ \alpha\in((v-c)/(v+c),1].\end{cases}$

3)在 $v<c$ 的条件下,则对任意的 $\alpha\in[0,1]$, 有 $B_1>0, B_0>0$, 但

①$\begin{cases}A_1<0, & 当\ \alpha\in[0,c/(2v+c));\\ A_1=0, & 当\ \alpha=c/(2v+c);\\ A_1>0, & 当\ \alpha\in(c/(2v+c),1].\end{cases}$

②$\begin{cases}A_0<0, & 当\ \alpha\in[0,(c-v)/(v+c));\\ A_0=0, & 当\ \alpha=(c-v)/(v+c);\\ A_0>0, & 当\ \alpha\in((c-v)/(v+c),1].\end{cases}$

于是,结合引理 1 可得到不同情形下参与人采用“鸽”策略的最佳反应函数.

引理 2　在 $v\geqslant c$ 的条件下,博弈双方的相互反应函数如下:

1)对参与人 A 有

①当 $\alpha\in[0,1)$ 时,有 $\frac{\partial E_{\mathrm{A}}(p,q)}{\partial p}=A_1q-A_0<0,\forall q\in[0,1]$, A 的反应函数为

$p*=R(q)=0,\forall q\in[0,1]$;

②当 $\alpha=1$ 时,有 $\dfrac{\partial E_{\mathrm{A}}(p,q)}{\partial p}=A_1q-A_0\begin{cases}=0, & q=1\\ <0, & q\in[0,1)\end{cases}$, A 的反应函数为

$$p*=R(q)=\begin{cases}[0,1], & q=1;\\ 0, & q\in[0,1).\end{cases}$$

2)对参与人 B 有

①当 $\alpha\in[0,(v-c)/(v+c))$ 时,有 $\dfrac{\partial E_{\mathrm{B}}(p,q)}{\partial q}=-B_1p+B_0<0,\forall p\in[0,1]$, B 的反应函数为

$$q*=R(p)=0,\quad \forall p\in[0,1];$$

②当 $\alpha=(v-c)/(v+c)$ 时,有 $\dfrac{\partial E_{\mathrm{B}}(p,q)}{\partial q}=-B_1p+B_0\begin{cases}=0, & p=0;\\ <0, & p\in(0,1]\end{cases}$, B 的反应函数为

$$q*=R(p)=\begin{cases}[0,1], & p=0;\\ 0, & \forall p\in(0,1].\end{cases}$$

③当 $\alpha\in((v-c)/(v+c),1]$ 时,$\dfrac{\partial E_{B}(p,q)}{\partial q}=-B_1p+B_0\begin{cases}>0, & p\in[0,B_0/B_1)\\ =0, & p=B_0/B_1\\ <0, & p\in(B_0/B_1,1]\end{cases}$,B 的反应函数为

$$q*=R(p)=\begin{cases}1, & p\in[0,B_0/B_1);\\ [0,1], & p=B_0/B_1;\\ 0, & p\in(B_0/B_1,1].\end{cases}$$

引理 3 在 $v<c$ 的条件下,博弈双方的相互反应函数如下:

1)对参与人 A 有

①当 $\alpha\in[0,(c-v)/(v+c))$ 时,$\dfrac{\partial E_{A}(p,q)}{\partial p}=A_1q-A_0\begin{cases}>0, & q\in[0,A_0/A_1)\\ =0, & q=A_0/A_1\\ <0, & q\in(A_0/A_1,1]\end{cases}$,A 的反应函数为

$$p*=R(q)=\begin{cases}1, & q\in[0,A_0/A_1);\\ [0,1], & q=A_0/A_1;\\ 0, & q\in(A_0/A_1,1].\end{cases}$$

②当 $\alpha=(c-v)/(v+c)$ 时,有 $\dfrac{\partial E_{A}(p,q)}{\partial p}=A_1q-A_0\begin{cases}=0, & q=0\\ <0, & q\in(0,1]\end{cases}$, A 的反应函数为

$$p*=R(q)=\begin{cases}[0,1] & q=0;\\ 0, & q\in(0,1].\end{cases}$$

③当 $\alpha\in((c-v)/(v+c),1)$ 时,有 $\dfrac{\partial E_{A}(p,q)}{\partial p}=A_1q-A_0<0,\forall q\in[0,1]$, A 的反应函数为

$$p*=R(q)=0,\quad \forall q\in[0,1];$$

④当 $\alpha=1$ 时, $\dfrac{\partial E_{A}(p,q)}{\partial p}=A_1q-A_0\begin{cases}=0, & q=1\\ <0, & q\in[0,1)\end{cases}$, A 的反应函数为

$$p*=R(q)=\begin{cases}[0,1], & q=1;\\ 0, & q\in[0,1).\end{cases}$$

2)对参与人 B 有

对任意的 $\alpha\in[0,1]$, 均有 $\dfrac{\partial E_{B}(p,q)}{\partial q}=-B_1p+B_0\begin{cases}>0, & p\in[0,B_0/B_1)\\ =0, & p=B_0/B_1\\ <0, & p\in(B_0/B_1,1]\end{cases}$, B 的反应函数为

$$q* = R(p) = \begin{cases} 1, & p \in [0, B_0/B_1); \\ [0,1], & p = B_0/B_1; \\ 0, & p \in (B_0/B_1, 1]. \end{cases}$$

利用反应函数方法,我们可得到均衡解的结果.

定理 1　在 $v \geqslant c$ 的情形下,鹰鸽博弈 Nash 均衡解 $\{p*, q*\}$ 为

1) 如果 $\alpha \in [0, (v-c)/(v+c))$,则存在唯一 Nash 均衡 $\{1,1\}$;

2) 如果 $\alpha = (v-c)/(v+c)$,则存在无数个混合策略 Nash 均衡 $\{0,q\}$,$q \in [0,1]$;特别地,当 $\alpha = 0$ 时,$\{1,0\}$ 也是均衡解;

3) 如果 $\alpha \in ((v-c)/(v+c), 1)$,则存在唯一 Nash 均衡 $\{0,1\}$;

4) 如果 $\alpha = 1$,则存在无数个混合策略 Nash 均衡 $\{p,1\}$,$p \in [0, B_0/B_1]$.

定理 2　在 $v < c$ 的情形下,则 Nash 均衡解为

1) 如果 $\alpha \in [0, (c-v)/(v+c))$,则不仅存在 2 个纯策略 Nash 均衡 $\{0,1\}\{1,0\}$,而且存在一个混合策略均衡解 $\{p*, q*\} = \{B_0/B_1, A_0/A_1\}$;

2) 如果 $\alpha = (c-v)/(v+c)$,则不仅存在 2 个纯策略 Nash 均衡 $\{0,1\}\{1,0\}$,而且存在无数个混合策略均衡解 $\{p,0\}$,$p \in [B_0/B_1, 1]$;

3) 如果 $\alpha \in ((c-v)/(v+c), 1)$,则只存在唯一纯策略 Nash 均衡 $\{0,1\}$;

4) 如果 $\alpha = 1$,则存在无数个混合策略均衡解 $\{p,1\}$,$p \in [0, B_0/B_1]$.

根据定理 1 和定理 2,我们可以直接获得对称型鹰鸽博弈($\alpha = 0$)的经典结论:

推论 1　对于传统对称型鹰鸽博弈,Nash 均衡解为

1) 如果 $v > c$,则{鹰,鹰}是博弈的唯一策略 Nash 均衡;

2) 如果 $v = c$,则{鸽,鹰}、{鹰,鸽}、{鹰,鹰}均是博弈的 Nash 均衡;

3) 如果 $v < c$,则博弈不仅存在{鸽,鹰}、{鹰,鸽}这 2 个纯策略 Nash 均衡,而且存在混合策略均衡解 $\{1 - v/c, 1 - v/c\}$.

可以看出:本文所构建的鹰鸽博弈模型是传统模型的推广,不仅充分说明了参与人实力差距对博弈 Nash 均衡解具有重要影响,还揭示了存在多个 Nash 均衡解,甚至无数个混合策略均衡解的情形.

3　均衡解的稳定性分析

众所周知,博弈分析的目的是预测参与人的合理行为方式.如果博弈只有唯一博弈均衡解,则该均衡是博弈双方唯一合理的行为方式,显然具有稳定性.但如果博弈存在多个 Nash 均衡,则必须找出具有一致性预测的均衡.为此,下文重点分析均衡解的稳定性.

根据博弈支付矩阵表 1 以及参与人 A 和参与人 B 的期望效用函数式(1)和式(2),利用有限理性复制动态方程分析理论,2 个参与人采取“鸽”策略的复制动态方程为

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = p[u_A^D - E_A(p,q)] = p(1-p)(A_1 q - A_0); \tag{5}$$

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = q[u_B^D - E_B(p,q)] = q(1-q)(-B_1 p + B_0). \tag{6}$$

式中:$u_A^D = qv(1+\alpha)/2$,$u_B^D = qv(1-\alpha)/2$.

于是,根据上述复制动态方程,结合定理 1 的条件分类分析博弈均衡解稳定性,可得到如下定理.

定理 3　假设参与人 A 与参与人 B 的实力差为 $\alpha \in [0,1]$,如果 $v \geqslant c$,则

1) 当 $\alpha \in [0, (v-c)/(v+c)]$ 时,Nash 均衡{鹰,鹰}是唯一的 ESS;

2) 当 $\alpha \in ((v-c)/(v+c), 1]$ 时,Nash 均衡{鹰,鸽}是唯一的 ESS.

证明(1)在 $v \geqslant c$ 情形下,如果实力差 $\alpha \in [0, (v-c)/(v+c)]$,根据定理 1,$\alpha < (v-c)/(v+c)$ 时只有唯一 Nash 均衡{鹰,鹰},显然具有稳定性,因此只需证明 $\alpha = (v-c)/(v+c)$ 时

{鹰,鹰}也是 ESS.事实上,当 $\alpha = (v-c)/(v+c)$ 时, $B_0 = 0$, 根据引理 2,此时 $A_1 q - A_0 < 0, \forall q \in [0,1]$, 因此式(5)的复制动态相位图如图 1a 所示;而当 $p=0$ 时, $-B_1 p + B_0 = 0$, 当 $p \in (0,1]$ 时, $-B_1 p + B_0 = -B_1 p < 0$, 故式(6)的复制动态相位图如图 1b 所示.于是,根据图 1c 所示的复制动态关系和稳定性,{鹰,鹰}是 ESS.

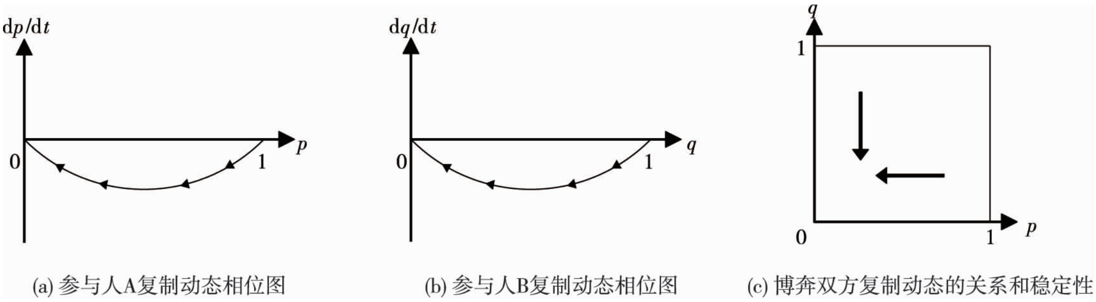


图 1 在 $v \geqslant c$ 且 $\alpha = (v-c)/(v+c)$ 情形下的相位图

值得注意的是,虽然 $\{0,q\}$,$q \in (0,1]$ 也是均衡解,但不稳定.事实上可根据双方期望收益函数进行判断.很容易计算得到 $E_B(p*,q*)|_{\alpha=(v-c)/(v+c)} \equiv 0, \forall q \in [0,1]$ 和 $E_A(p*,q*)|_{\alpha=(v-c)/(v+c)} = v - c + qc$. 据此可看出,参与人 B 虽然可以选择任意的 q, 但没有理由选择 $q \neq 0$, 使得对方的收益增加,因此,{鹰,鹰}依然是 ESS.

(2)在 $v \geqslant c$ 情形下,如果实力差 $\alpha \in ((v-c)/(v+c),1]$, 根据定理 1,同样只需证明当 $\alpha = 1$ 时, Nash 均衡{鹰,鸽}是 ESS.事实上,根据性质 1,有 $\forall q \in [0,1)$,$A_1 q - A_0 < 0$; 而 $q=1$ 时 $A_1 q - A_0 \equiv 0$, 则(5)式的复制动态相位图如图 2a;同时有

$$-B_1 p + B_0 \begin{cases} > 0, & p \in [0, B_0/B_1) ; \\ = 0, & p = B_0/B_1 ; \\ < 0, & p \in (B_0/B_1, 1] . \end{cases}$$

故式(6)的复制动态相位图如图 2b 所示.于是,他们复制动态的关系和稳定性如图 2c 所示,可以看出,如果存在部分(比例 $p > B_0/B_1$)强者采用“鸽”策略,则会导致弱者具有采取“鹰”策略发展的趋势,从而有损强者的利益.面对这种威胁,强者必然会采取“鹰”策略来维护自身利益,因此,博弈只存在混合策略 Nash 均衡 $\{p*,q*\} = \{0,1\}$, 即纯策略 Nash 均衡{鹰,鸽} ,从而{鹰,鸽}是 ESS.

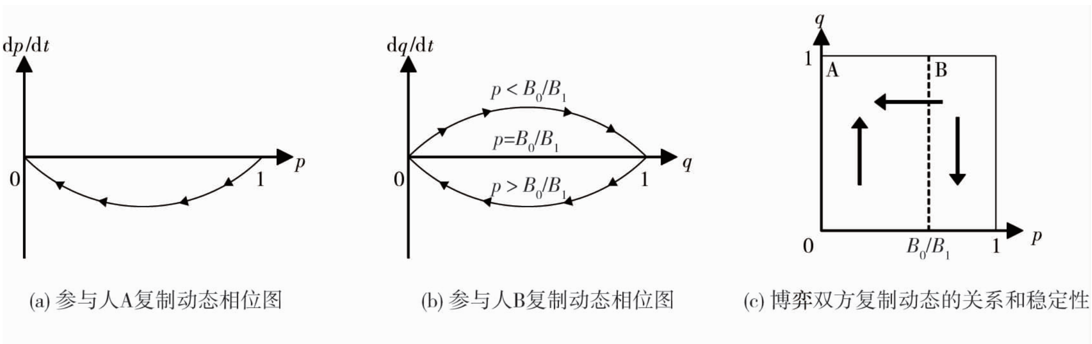


图 2 在 $v \geqslant c$ 且 $(v-c)/(v+c) < \alpha \leqslant 1$ 情形下的相位图

同样值得注意,虽然 $\{p,1\}$,$p \in (0, B_0/B_1]$ 是 Nash 均衡解,但也不稳定.因为此时参与人的期望效益为 $E_A(p^*,q^*)|_{\alpha=1} = E_A(p,1)|_{\alpha=1} = v, \forall p \in [0,1]$,$E_B(p^*,q^*)|_{\alpha=1} = E_B(p,1)|_{\alpha=1} = 0$. 显然参与人 A 没有理由选择 $p \neq 0$, 否则未来博弈中可能给对方造成错觉,对于实力很强的 A 是不明智的,因此{鹰,鸽}依然是 ESS,证毕.

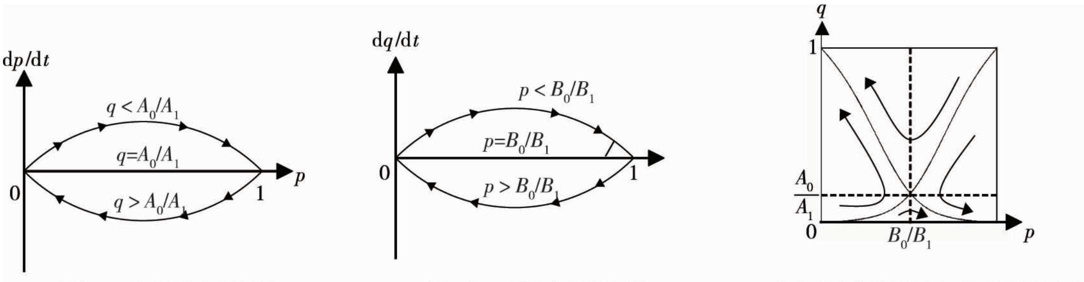
定理 4 假设参与人 A 与参与人 B 的实力差为 $\alpha \in [0,1]$, 如果 $v < c$, 则

(1)当 $\alpha \in [0,(c-v)/(v+c))$ 时,{鸽,鹰}、{鹰,鸽}这 2 个纯策略 Nash 均衡都是 ESS,而混合策

略均衡解 $\{B_0/B_1, A_0/A_1\}$ 是鞍点,不稳定.

(2)当 $\alpha \in [(c-v)/(v+c), 1]$ 时,{鹰,鸽} Nash 均衡是唯一的 ESS.

证明　由于证明过程类似,因此只证明结论(1).事实上,当实力差 $\alpha \in [0, (c-v)/(v+c))$ 时,根据引理 3,当且仅当 $0 \leqslant q \leqslant A_0/A_1$ 时 $A_1 q - A_0 \geqslant 0$, 当且仅当 $0 \leqslant p \leqslant B_0/B_1$ 时 $-B_1 p + B_0 \geqslant 0$. 于是,从式(5)和式(6)这 2 个复制动态方程可分别获得如图 3a 和 图 3 b 所示的复制动态相位图.



(a) 参与人A复制动态相位图　(b) 参与人B复制动态相位图　(c) 博弈双方复制动态的关系和稳定性

图 3　在 $v < c$ 且 $0 \leqslant \alpha < (c-v)/(v+c)$ 情形下的相位图

同时,注意到此时博弈存在混合策略均衡解 $\{p*, q*\} = \{B_0/B_1, A_0/A_1\}$, 利用稳定性理论方法,可计算得到在该均衡点的动态方程组的雅可比矩阵为

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 0 & p*(1-p*)A_1 \\ -q*(1-q*)B_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

此时雅可比矩阵的迹 tr $\boldsymbol{J} = 0$. 同时由于 $A_1 < 0$ 且 $B_1 > 0$, 行列式 det $\boldsymbol{J} < 0$, 且特征方程 $\det(\boldsymbol{J}-\lambda I) = 0$ 的特征根为

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\sqrt{-p*(1-p*)q*(1-q*)A_1 B_1} \\ \lambda_2 = \sqrt{-p*(1-p*)q*(1-q*)A_1 B_1} \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 < 0 < \lambda_2.$$

因此,根据稳定性理论(参见张耀峰(2016)p:40-47)可以判断其不稳定,而且是一个鞍点[26].博弈双方复制动态的相互关系可见图 3c.由此可看出博弈存在 2 个 ESS {鹰,鸽}和{鸽,鹰}.证毕.

下面根据定理 3 和定理 4,进一步分析 ESS 的影响因素和变化规律.由于参与人在博弈中不仅要考虑自身实力,而且要考虑成本收益率问题,记 $\theta = v/c$ 为整体成本收益率.从定理 3 和定理 4 可以看出,无论 $\theta \in [1, \infty)$ 还是 $\theta \in (0,1)$, 实力差 α 对 ESS 均存在影响(如图 4 所示),即可用推论 2 和推论 3 刻画.

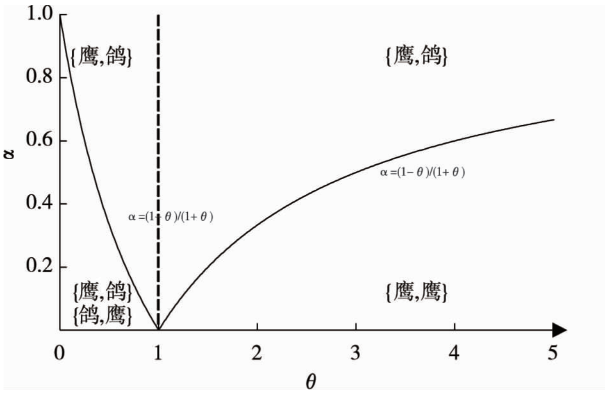


图 4　不同实力差和成本效益率下的 ESS

推论 2　如果 $\theta \in [1, \infty)$, 则 $\alpha \in [0, (\theta-1)/(\theta+1))$ 时,存在唯一 ESS {鹰,鹰};而 $\alpha \in [(\theta-1)/(\theta+1), 1]$ 时,只存在唯一 ESS {鹰,鸽}.

根据推论 2(结合图 4)可以看出:在成本收益率大于 1 的情形下,ESS 不仅与博弈双方的实力差距有关,而且与博弈的成本效益率有关.在现实管理决策中,实力强的一方采取"鹰"策略是最优决策;而对于实

力弱的一方,必须根据成本收益率的具体情况进行决策,如果实力差距较小, $\alpha < (\theta - 1) / (\theta + 1)$,则必须采取“鹰”策略,但如果实力差距较大, $\alpha > (\theta - 1) / (\theta + 1)$,则采取“鸽”策略是最优选择.

例如:当 $\theta = 3$ 时,如果实力差距在 0.5 以内,{鹰,鹰}是唯一的 ESS,博弈双方都采取“鹰”策略是最优决策.否则,如果实力差距超过 0.5,{鹰,鸽}才是 ESS,则实力弱的参与人只能采取“鸽”策略.如果弱者强行采取“鹰”策略,其利益必然为负值,如 $\alpha = 0.6$, 则其获得的利益为 $-0.2v < 0$, 对于弱者而言显然不是明智之举.

这一结论与传统对称型鹰鸽博弈只有唯一的 ESS{鹰,鹰}存在差异.同时,还可看出,成本收益率越大,群体博弈中双方均采取“鹰”策略的概率也越大,这是因为随着成本收益率的增大,实力相差稍微大的双方也能获得正的利益,这就解释了现实世界中面对有利可图的资源,为什么参与争夺的人会越来越多的现象.

推论 3 如果 $\theta \in (0,1)$,则当 $\alpha \in [0,(1-\theta)/(1+\theta))$ 时,存在 2 个 ESS {鸽,鹰}{鹰,鸽};而当 $\alpha \in [(1-\theta)/(1+\theta),1]$ 时,只存在唯一 ESS {鹰,鸽}.

推论 3 说明:在成本收益率 $\theta \in (0,1)$ 的情形下,强者选择“鹰”策略不一定是最优选择,对此,到底在什么情况下是最优呢? 根据图 4,如果强者的实力超过对方 $(1-\theta)/(1+\theta)$,或者说如果发生冲突,获胜的概率大于 $(1-\theta)/(1+\theta)$,则采取“鹰”策略是最优选择;相应地,弱者采取“鸽”策略是最优选择.但当 $\alpha \in [0,(1-\theta)/(1+\theta))$ 时,存在 2 个 ESS,出现了所谓的“混沌”现象.事实上,这 2 个均衡点的存在性取决于复制动态过程中混合策略组合 $\{p,q\}$ 的初始状态.对此,我们做如下分析:

对于在鞍点周围混合策略 $\{p,q\}$ 向稳定点的变化趋势问题,我们可利用动态方程式(5)和式(6)所代表的变化速度,得到方程

$$\left(p - \frac{B_0}{B_1}\right) / \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \left(q - \frac{A_0}{A_1}\right) / \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}. \tag{7}$$

该方程表示 p 和 q 分别到达鞍点坐标值 B_0/B_1 和 A_0/A_1 的时间相等.如果式(7)左端小于右端,则说明在复制动态过程中, p 值较快“穿越”临界值 B_0/B_1;否则,则较慢“穿越”.这就是博弈论中博弈双方复制动态演变的基本规律.

通过对式(7)的变形得到一个关于 p 和 q 的二元函数方程:

$$A_1 q(1-q)(-B_1 p + B_0)^2 + B_1 p(1-p)(A_1 q - A_0)^2 = 0. \tag{8}$$

将其变形得到关于 q 的一元二次方程 $a(p)q^2 + b(p)q + c(p) = 0$, 其中

$$\begin{cases} a(p) = B_1 A_1^2 p(1-p) - A_1(-B_1 p + B_0)^2; \\ b(p) = A_1(-B_1 p + B_0)^2 - 2A_1 A_0 B_1 p(1-p); \\ c(p) = B_1 A_0^2 p(1-p). \end{cases}$$

由于在 $0 \leqslant p \leqslant 1$ 范围内 $\Delta = [b(p)]^2 - 4a(p)c(p) \geqslant 0$, 因此有方程解

$$q = q(p) = \frac{-b(p) \pm \sqrt{(b(p))^2 - 4a(p)c(p)}}{2a(p)}.$$

记符号函数 $\mathrm{sgn}(x)$,如果 $x \geqslant 0$ 则 $\mathrm{sgn}(x) = 1$;如果 $x < 0$ 则 $\mathrm{sgn}(x) = 0$, 则得到一条曲线

$$q_1 = q_1(p) = \mathrm{sgn}\left(p - \frac{B_0}{B_1}\right) \frac{-b(p) + \sqrt{[b(p)]^2 - 4a(p)c(p)}}{2a(p)} - \mathrm{sgn}\left(\frac{B_0}{B_1} - p\right) \frac{b(p) + \sqrt{(b(p))^2 - 4a(p)c(p)}}{2a(p)}. \tag{9}$$

可以推断,并获得如下推论 4:

推论 4 如果 $\theta \in (0,1)$ 且 $\alpha \in [0,(1-\theta)/(1+\theta))$,则当初始混合策略 $\{p,q\}$ 所对应的点在曲线 $q_1 = q_1(p)$ 的下方时,混合策略 $\{p,q\}$ 将演化到均衡解 $\{1,0\}$,即{鸽,鹰}为 ESS;当初始混合策略 $\{p,q\}$ 所对应的点在曲线 $q_1 = q_1(p)$ 的上方时,混合策略 $\{p,q\}$ 将演化到 $\{0,1\}$,即{鹰,鸽}为 ESS.

从概率论角度,假设初始混合策略 $\{p,q\}$ 在空间 $\{(p,q):(p,q)\in[0,1]\times[0,1]\}$ 上服从均匀分布,则我们可以分析得到在成本收益率 $\theta\in(0,1)$ 的条件下,计算在曲线 $q_1=q_1(p)$ 下方的曲边三角形的面积,其代表初始混合策略 $\{p,q\}$ 向 $\{1,0\}$ 演化的概率.这一概率可以通过如下积分获得,即

$$\Pr\{\{p^*,q^*\}=\{1,0\}\}=\int_0^1 q_1(p)\,\mathrm{d}p.$$

对此,我们假设 $v=5,c=10$, 即 $\theta=0.5$, 取 $\alpha=0,0.100,0.200,0.300,\ 0.333$,根据式(9)可以得到 5 条曲线的变化规律(如图 5 所示),即随着博弈双方的实力差 α 在 $[0,1-2/(1+\theta))$ 内变大,则{鸽,鹰}为 ESS 的概率越来越小.对于有兴趣的读者,也可以通过式(9)对任意固定的 $p\in(0,1)$ 计算 $\mathrm{d}q_1/\mathrm{d}\alpha$, 证明 $\mathrm{d}q_1/\mathrm{d}\alpha<0$. 本文因篇幅限制,证明过程省略.

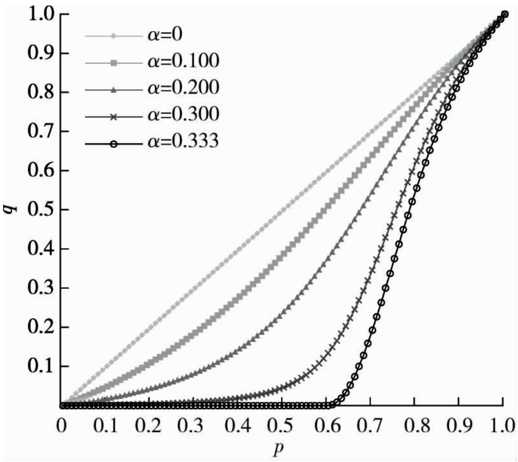


图 5　不同实力差下曲线 $q_1=q_1(p)$ 的变化趋势特征

这一结论充分揭示了上面所说的所谓“混沌”现象并不混沌.在管理实践中,面对冲突,对抗总成本超过总收益的情形,双方都必须谨慎决策,充分了解关于同类收益率对抗问题的群体历史行为,因为历史行为可理解为博弈的初始状况,群体行为的演化是建立在初始状态之上的.也就是实力强的博弈方不仅要结合如果发生对抗情形,赢的概率大小,而且要考虑群体的历史行为.如果实力差距不够大,过去很多实力强者选择了“鸽”策略(初始混合策略 $\{p,q\}$ 所对应的点在曲线 $q_1=q_1(p)$ 的下方),则同样选择“鸽”策略是最优选择.由此可见,并非实力比对手强就一定要选择“鹰”策略.

4　实例分析

海洋具有丰富的油气、矿产和生物资源,在技术经济发展和陆地资源短缺的背景下,海洋资源的争夺成为周边国家面临的重大博弈问题.由此,本文以海洋资源争夺为例,针对不同成本收益率情形,分析国家 A 与国家 B 的博弈策略选择.

4.1　成本收益率 $\theta\in[1,\infty)$ 情形下的博弈策略选择

某海底油气资源的开发总价值 $v=110$, 国家 A 与国家 B 均选择“鹰”策略的冲突总成本 $c=90$, 即成本收益率 $\theta=11/9>1$; 同时假定在争夺此资源上国家 A 具有更强的实力,即与国家 B 的实力差距 $0\leqslant\alpha\leqslant1$,则两国的博弈支付矩阵如表 2 所示.

表 2　某海底油气资源争夺博弈的支付矩阵

		B 国	
		鸽(D)	鹰(H)
A 国	鸽(D)	$55\alpha+55,\ -55\alpha+55$	0,110
	鹰(H)	110,0	$100\alpha+10,\ -100\alpha+10$

根据推论 2,如果国家 A 与国家 B 争夺资源的实力差距 $\alpha\in[0.1,1]$,则博弈将稳定于国家 A 采取

“鹰”策略,而国家 B 采取“鸽”策略;如果两国的实力差距缩小至 $\alpha \in [0,0.1)$,则国家 A 依然倾向于采取“鹰”策略,而实力稍弱的国家 B 也可以采取“鹰”策略,即使付出一定的成本,也将获得比采取“鸽”策略更大的正利润.这就说明了,对于成本收益率 $\theta > 1$ 的资源,强势方国家 A 势必会采取强硬态度进行争夺,而从国家 B 的角度,如果与国家 A 之间的实力差距过大,明智的选择是暂时放弃对该资源的争夺,进而韬光养晦、增强国力,直到两国实力差距较小,就可以参与对该资源的争夺.

4.2 成本收益率 $\theta \in (0,1)$ 情形下的博弈策略选择

某海洋生物资源的开发总价值 $v = 90$, 国家 A 与国家 B 均选择“鹰”策略的冲突总成本 $c = 110$, 即成本收益率 $\theta = 9/11 < 1$; 进一步假定在争夺此资源上国家 A 具有更强的实力,即与国家 B 的实力差距 $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, 则两国的博弈支付矩阵如表 3 所示.

表 3 某海洋生物资源争夺博弈的支付矩阵

		B 国	
		鸽(D)	鹰(H)
A 国	鸽(D)	$45\alpha + 45, -45\alpha + 45$	0,90
	鹰(H)	90,0	$100\alpha - 10, -100\alpha - 10$

根据定理 4 或推论 3,如果国家 A 与国家 B 争夺资源的实力差距 $\alpha \in [0.1,1]$,则博弈将稳定于国家 A 采取“鹰”策略,而国家 B 采取“鸽”策略;如果随着国家 B 的国力逐渐增强,两国争夺资源的实力差距缩小至 $\alpha \in [0,0.1)$,则博弈可能演化至{鹰,鸽}或{鸽,鹰}策略组合,最终将稳定于哪一策略组合则取决于争夺资源的初始意愿程度.假定两国分别对该资源争夺问题进行民意调查,获得支持“鸽”策略的比例组合 $\{p,q\} = \{0.2,0.4\}$,则根据推论 4,该组合对应的点与曲线 $q_1 = q_1(p)$ 的关系如图 8 所示,博弈将稳定于{鹰,鸽}策略组合.

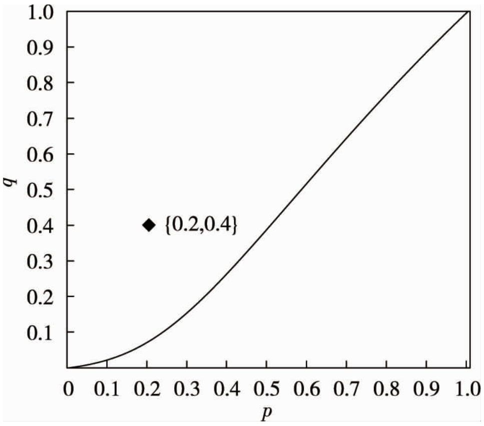


图 6 某海洋生物资源争夺博弈的初始意愿组合与曲线 $q_1 = q_1(p)$

这就说明,对于成本收益率 $\theta < 1$ 的资源,如果国家 A 实力优势较大,其会采取“鹰”策略,此时国家 B 应选择“鸽”策略避免造成损失,努力提升自身实力.随着实力差距缩小, 国家 A 将有一定概率放弃争夺,此时国家 B 若推测国家 A 大概率采取“鹰”策略,则自身采用“鸽”策略依然是明智的选择.一旦国家 B 成为强势方,可以通过释放强烈的“鹰”策略选择倾向或提升实力差距至 $\alpha \geqslant 0.1$ 逼退国家 A,全部占据资源.

5 结论

1)参与人实力差距和成本效益率共同影响博弈 Nash 均衡解的存在性. 在有限理性复制动态分析框架下, 实力差距、成本收益率以及初始混合策略 $\{p,q\}$ 影响着 ESS. 而且当博弈争夺的总收益大于或等于双方对抗的总成本时,被争夺资源的成本收益率 $\theta = v/c$ 越大,博弈中双方均采用“鹰”策略的概率越大;而当博弈争夺的总收益小于双方对抗的总成本时,则随着成本收益率 $\theta = v/c$ 增大,实力强的博弈方采取“鹰”策略的概率越大.

2)所构建的非对称鹰鸽博弈模型可广泛应用于经济、政治、军事等诸多现实问题,如:在实力不对称的企业竞争、国际资源冲突局面中的策略与行为选择问题等,不仅对鹰鸽博弈理论的发展具有很好的学术价值,而且对现实行为决策具有很好的应用价值.

参考文献:

[1] 约翰·梅纳德·史密斯.演化与博弈论[M].上海:复旦大学出版社,2008.

[2] SMITH J M, PRICE G R. The Logic of Animal Conflict[J]. Nature, 1973, 246(5427): 15-18.

[3] 谢识予.经济博弈论[M].上海:复旦大学出版社,2002.

[4] QUIGGIN J C. A Theory of Anticipated Utility[J]. Journal of Economic Behavior & Organization, 1982, 3(4): 323-343.

[5] 熊国强,陈爱娟.鹰鸽博弈问题新解——非期望效用理论下的博弈模型及其均衡分析[J].经济评论,2009(1):128-132.

[6] 龚日朝.基于秩依期望效用理论的鹰鸽博弈均衡解分析[J].管理科学学报,2012,15(9):35-45.

[7] 洪开荣,孙丹.农村征地冲突的 RDEU 鹰鸽博弈均衡分析[J].中南大学学报(社会科学版),2017,23(5):95-104.

[8] HONG K, ZOU Y, ZHANG Y, et al. The Weapon of the Weak: An Analysis of RDEU Game in the Conflict of Farmland Expropriation under the Influence of Emotion[J]. Sustainability, 2020, 12: 3367.

[9] JING K, SHI R. Analysis of the RDEU Game Model in Mass Emergencies with Maintained Legal Rights by Emotion[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2018, 2018(14): 4345051.

[10] 刘德海,柴瑞瑞,方乐.逻辑斯蒂情绪效用如何影响群体性事件的均衡结果?[J].系统工程理论与实践,2019,39(7):1807-1816.

[11] 熊国强,张毅.考虑情绪因素的城市拆迁 RDEU 博弈模型与系统脆性分析[J].运筹与管理,2019,28(9):99-106.

[12] 徐浩,张妍,谭德庆.参与者情绪对环境污染邻避冲突影响的演化分析[J].软科学,2019,33(3):121-126.

[13] MESTERTON-GIBBONS M. Ecotypic variation in the asymmetric Hawk-Dove game: When is Bourgeois an evolutionarily stable strategy?[J]. Evolutionary Ecology, 1992, 6(3): 198-222.

[14] MESTERTON-GIBBONS M, KARABIYIK T, SHERRATT T N. The Iterated Hawk - Dove Game Revisited: The Effect of Ownership Uncertainty on Bourgeois as a Pure Convention[J]. Dynamic Games & Applications, 2014, 4(4): 407-431.

[15] HE J, ZHAO Y, CAI H, et al. Spatial games and the maintenance of cooperation in an asymmetric Hawk-Dove game[J]. Chinese Science Bulletin, 2013, 58(18): 2248-2254.

[16] 陈璐,孙圣兰,陈雯.智能技术创新网络下企业行为决策的演化博弈分析[J].数学的实践与认识,2019,49(13):284-289.

[17] EVANS-RIESTER I, KAY C, ORTIZ-SUAREZ K, et al. Kleptoparasitic Hawk-Dove Games[J]. SPORA: A Journal of Biomathematics, 2021,7(1): 17-24.

[18] 王瑞武,贺军州,王亚强,等.非对称性有利于合作行为的演化[J].中国科学:生命科学,2010,40(8):758-764.

[19] 宋波,黄静.非对称性合作视角下策略联盟的稳定性分析——基于鹰鸽博弈模型[J].软科学,2013,27(2):28-31.

[20] 单海东,刘亚相.农村金融市场资金供给问题的博弈分析[J].浙江农业学报,2014,26(2):510-516.

[21] 刘靖羽,尹奇,陈文宽.集体建设用地流转中集体经济组织行为分析——基于鹰鸽博弈理论[J].四川农业大学学报,2015, 33(4):458-463.

[22] ZHOU G, WU X. Hawk-dove game study on green railway alignment selection[J]. International Journal of Applied Decision Sciences, 2017, 10(4): 315-326.

[23] 刘戈,汪旭.集体建设用地流转入市过程中地方政府行为分析——基于鹰鸽博弈的视角[J].城市发展研究,2018,25(4): 137-140.

[24] HALL C L, PORTER M A, DAWKINS M S. Dominance, sharing, and assessment in an iterated Hawk-Dove game[J]. Journal of Theoretical Biology, 2020, 493: 110101.

[25] 李芳,吴凤平,陈柳鑫,等.非对称性视角下跨境水资源冲突与合作的鹰鸽博弈模型[J].中国人口·资源与环境,2020, 30(5): 157-166.

[26] 张耀峰.社会系统演化博弈建模与仿真[M].北京:科学出版社,2016.