

用单自由度系统研究双模量变截面梁的冲击

吴晓

(湖南文理学院 土木建筑工程学院,湖南 常德 415000)

摘要:研究了重物对双模量等高变截面梁的冲击问题.把被冲击的双模量等高变截面梁简化为一集中质量与无重弹簧相连接的单自由度弹性系统,使重物对梁的冲击问题转化为重物对具有集中质量单自由度弹性系统的冲击问题,然后采用动力学方程推导出了重物对梁的动载荷系数、冲击时间的函数表达式,克服了能量法仅能给出最大动载荷系数的不足.通过算例分析,指出有关文献给出的最大动载荷系数公式,仅是动力学方程推导出的动载荷系数函数式的特例.当拉压弹性模量相差较大时,不能把重物对双模量等高变截面梁的冲击问题简单处理为重物对单模量等高变截面梁的冲击问题,必须要考虑拉压弹性模量不同因素对双模量变截面梁受冲击的影响.

关键词:弹性系统;弹性模量;双模量;变截面;梁;冲击;动载荷系数

中图分类号: O347.1 **文献标识码:** A **文章编号:** 1672-9102(2013)03-0053-06

在土木、机械等实际工程中,冲击问题是较为常见的力学现象.在重物对结构的冲击过程中,结构的形状、承载力会在极短的时间内发生急剧的变化,对结构的工作性能和使用寿命会产生严重的影响.因此,工程设计人员对重物冲击结构的问题一直极为关注.有关文献及专著采用能量法研究了重物对梁的冲击问题,能量法计算简便但仅能给出最大动载荷系数,却不能给出动载荷系数及冲击时间的函数表达式,因为能量法没有考虑时间空间因素.采用 Hertz 接触理论研究重物对梁的冲击问题,虽然可以克服能量法存在的缺陷,但是 Hertz 接触理论计算过程复杂繁琐,不便工程设计人员在实际工程中应用.在工程实际中,混凝土、增强复合材料、金属合金等许多材料都具有拉压弹性模量不同的双模量特性,许多文献[1-8]对具有双模量特性结构的变形进行了研究计算.因此,本文把被冲击的双模量等高变截面梁简化为一集中质量与无重弹簧相连接的单

自由度弹性系统,采用动力学方程推导出了重物对双模量等高变截面梁冲击时的动载荷系数、冲击时间的函数表达式.

1 变截面梁静力学问题

由材料力学可知双模量梁弯曲时的应力和应变关系为

$$\sigma_1 = \frac{E_1 y}{\rho}, \sigma_2 = \frac{E_2 y}{\rho}. \quad (1)$$

式中, E_1 为拉伸区的弹性模量, E_2 为压缩区的弹性模量, ρ 为梁弯曲时中性层的曲率半径.

设图 1 所示等高变截面简支梁在任意荷载作用下发生弯曲变形,以 A 点为力矩支点可知

$$R_B l - \sum_{i=1}^n m_i - \sum_{j=1}^n P_j b_j - \int_c^d q(x) x dx = 0. \quad (2)$$

$$R_B = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{l} + \sum_{j=1}^n \frac{P_j b_j}{l} + \int_c^d \frac{q(x) x}{l} dx; \quad (3a)$$

收稿日期:2012-10-11

基金项目:湖南省“十二五”重点建设学科(机械设计及理论)资助(湘教发 2011[76])

通信作者:吴晓(1965-),男,湖南常德人,教授,主要从事结构振动理论研究. E-mail: wx2005220@163.com

$$R_A = \sum_{j=1}^n P_j + \int_c^d q(x) dx - R_B. \quad (3b)$$

等高变截面双模量筒支梁的支座反力确定后,即可方便写出等高变截面双模量筒支梁任意截面的弯矩表达式 $M(x)$.

由图(1b)可知等高变截面双模量筒支梁任意截面梁宽为

$$b(x) = \frac{2b_0x}{l} \quad (0 \leq x \leq \frac{l}{2}). \quad (4)$$

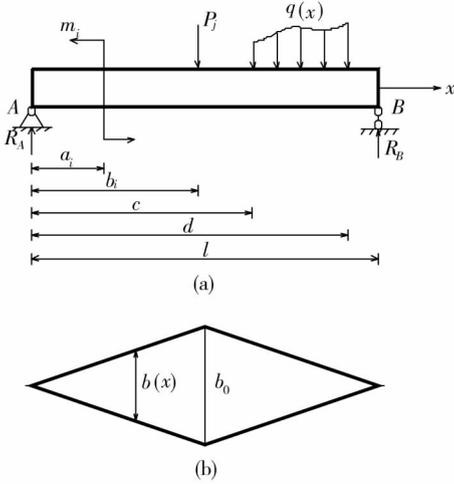


图1 任意荷载作用下双模量等高变截面筒支梁

Fig. 1 Simply supported bimodulus beam with equal height and variable cross sections under arbitrary loads

由材料力学可知双模量梁弯曲时横截面内力应满足

$$\int_0^{h_1} \sigma_1 b(x) dy + \int_{-h_2}^0 \sigma_2 b(x) dy = 0; \quad (5a)$$

$$\int_0^{h_1} \sigma_1 y b(x) dy + \int_{-h_2}^0 \sigma_2 y b(x) dy = M(x). \quad (5b)$$

把式(1)、式(4)代入式(5)中可以得到

$$h_1 = \frac{h \sqrt{E_2}}{\sqrt{E_1} + \sqrt{E_2}}, h_2 = h - h_1; \quad (6a)$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{M(x)l}{2Dx}. \quad (6b)$$

式中, $D = b_0(\frac{E_1 h_1^3}{3} + \frac{E_2 h_2^3}{3})$, w 为梁的挠度.

由以上推导可知双模量梁中性轴的位置与作用在梁的横向载荷无关.

把式(6b)代入式(1)中可得梁的应力表达式为

$$\sigma_1 = \frac{E_1 l M(x) y}{2Dx}, \sigma_2 = \frac{E_2 l M(x) y}{2Dx}. \quad (7)$$

当一集中力 P 作用在等高变截面双模量筒支

梁中点时,由式(6b)及边界条件可以得到挠度表达式为

$$w(x) = \frac{Plx}{8D}(x-l), (0 \leq x \leq \frac{l}{2}). \quad (8)$$

2 冲击问题的求解

当重物 m 对图 1 所示等高变截面双模量筒支梁中点冲击时,可将其转化为图 2 所示重物对具有集中质量单自由度弹性系统的冲击. 为了简化冲击计算可作如下假设:忽略阻尼对冲击过程的影响,不考虑冲击过程中的能量损失,被冲击梁的最大位移始终在弹性范围内,梁的最大动应力不超过其材料的比例极限.

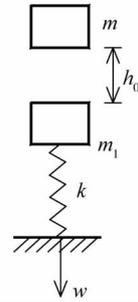


图2 弹性系统

Fig. 2 Elastic system

令重物与梁的质量分别为 m, M , 当重物自高度 h_0 处下落冲击前瞬时重物的速度为 $v_0 = \sqrt{2gh_0}$. 当重物与梁接触后开始变形时,重物与梁仅在接触处具有相同速度,因此可把梁质量 M 的一部分 $m_1 = eM$ 集中于冲击处作为一集中质量, e 称为梁的动量相当质量折算系数.

由于双模量梁在冲击处的速度为 v_1 , 因此可假设梁的初始速度分布函数为 $\dot{w}(x) = \dot{w}_0 x(x-l)$, 当冲击点处的坐标为 $(\frac{l}{2}, 0)$ 时,根据动量守恒定律有下式成立:

$$2 \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{2\rho b_0 h \dot{w}_0}{l} x^2 (x-l) dx = 2e \dot{w}(\frac{l}{2}) \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{2\rho b_0 h}{l} x dx; \quad (9)$$

$$e = \frac{5}{6}.$$

重物冲击梁开始变形瞬间有

$$mv_0 = (m + m_1)v_1, v_1 = \frac{mv_0}{m + m_1}. \quad (10)$$

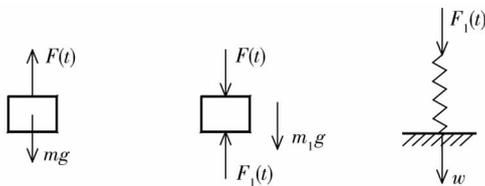


图3 弹性系统受力图

Fig. 3 Free body diagram of elastic system

当重物冲击双模量梁并开始与梁接触后,由动力学原理得

$$mg - F(t) = ma; \quad (11a)$$

$$F(t) + mg - F_1(t) = m_1 a; \quad (11b)$$

$$F_1(t) = kw. \quad (11c)$$

式中, $F(t)$ 为重物对梁的冲击力, $F_1(t)$ 为集中质量 m_1 对弹簧的作用力, k 为弹簧的刚度.

由式(11)可以得到下式

$$kw - (m + m_1)g + (m + m_1)a = 0. \quad (12)$$

$$\text{由于 } a = \frac{dv}{dt} = \frac{dw}{dt} \frac{dv}{dw} = v \frac{dv}{dw} = \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dw}. \quad (13)$$

把式(13)代入式(12)中可以得到

$$kw - (m + m_1)g + \frac{1}{2}(m + m_1) \frac{dv^2}{dw} = 0. \quad (14)$$

对式(14)进行一次积分可得

$$\frac{1}{2}kw^2 - (m + m_1)gw + \frac{1}{2}(m + m_1)v^2 = H. \quad (15)$$

式中, H 为能量常数.

重物冲击梁时的边界条件为

$$w = 0, v = v_1; w = w_d, v = 0. \quad (16)$$

式中, w_d 为梁最大动位移.

利用式(15)、式(16)可以求得

$$H = \frac{1}{2}(m + m_1)v_1^2; \quad (17a)$$

$$\frac{1}{2}kw_d^2 - (m + m_1)gw_d = \frac{1}{2}(m + m_1)v_1^2. \quad (17b)$$

$$\text{令动载荷系数为 } K_d = \frac{F(t)}{mg} = \frac{w}{w_s}. \quad (18)$$

式中, w_s 为重物 m 静止作用在梁上的静挠度.

利用式(11)、式(18)可以得到

$$k = \frac{(m + m_1)g}{w_s}. \quad (19)$$

把式(10)、式(19)代入式(17b)中可得

$$w_d^2 - 2w_s w_d - 2\xi^2 w_s h_0 = 0. \quad (20)$$

$$\text{式中, } \xi = \frac{1}{1 + \frac{m_1}{m}} < 1.$$

求解方程式(20)可得

$$w_d = w_s \left[1 + \left(1 + \frac{2\xi^2 h_0}{w_s} \right)^{\frac{1}{2}} \right]. \quad (21)$$

所以,考虑梁的质量时,重物对梁冲击时的最大动载荷系数为

$$(K_d)_{\max} = 1 + \left(1 + \frac{2\xi^2 h_0}{w_s} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (22)$$

把式(17a)、式(19)代入式(15)中可知

$$v = \frac{dw}{dt} = \left(v_1^2 + 2gw - \frac{gw^2}{w_s} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (23)$$

$$\text{由式(23)可得 } dt = \frac{dw}{\left(v_1^2 + 2gw - \frac{gw^2}{w_s} \right)^{\frac{1}{2}}}. \quad (24)$$

对式(24)积分可得冲击时间表达式为

$$t = \left(\frac{w_s}{g} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\arcsin\left(\frac{w}{w_s} - 1 \right) \left(1 + \frac{2\xi^2 h_0}{w_s} \right)^{-\frac{1}{2}} + \arcsin\left(1 + \frac{2\xi^2 h_0}{w_s} \right)^{-\frac{1}{2}} \right]. \quad (25)$$

在式(25)中当 $w = w_d$ 时,可知重物对双模量梁的冲击时间为

$$t_d = \left(\frac{w_s}{g} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\pi}{2} + \arcsin\left(1 + \frac{2\xi^2 h_0}{w_s} \right)^{-\frac{1}{2}} \right]. \quad (26)$$

由式(25)可以求得动载荷系数的函数式为

$$K_d = \frac{w}{w_s} = 1 + \left(1 + \frac{2\xi^2 h_0}{w_s} \right)^{\frac{1}{2}} \sin \left[\left(\frac{g}{w_s} \right)^{\frac{1}{2}} t - \arcsin\left(1 + \frac{2\xi^2 h_0}{w_s} \right)^{-\frac{1}{2}} \right]. \quad (27)$$

把式(26)代入式(27)中即可得式(22).以上推导表明由动力学原理可以得到与能量法相同的结果式(22),事实上能量法仅能得到冲击问题的最大动载荷系数,而不能得到冲击问题的动载荷系数及冲击时间的函数式.

3 算例分析

下面首先以重物对各向同性简支梁的冲击计算来验证本文方法的可靠性.

算例1 某简支钢梁的计算参数为:截面面积 $A = 1\,265.04 \text{ mm}^2$, 梁长 $l = 800 \text{ mm}$, 惯性矩 $I = 66\,946 \text{ mm}^4$, 梁的质量 $M = 7.8 \text{ kg}$, 弹性模量 $E = 210 \text{ GPa}$, 密度 $\rho = 7.8 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$. 冲击重物质量 $m = 7.5 \text{ kg}$, 重物距梁中点 $h_0 = 100 \text{ mm}$ 处自由下落对简支梁进行冲击.

设简支梁初始速度分布函数为 $\dot{w}(x) = \dot{w}_0 \left(\frac{3x}{l} \right)$

$-\frac{4x^3}{l^3}$ ($0 < x \leq \frac{l}{2}$), 由于各向同性简支梁的 $e =$

$\frac{5}{8}$, 而 $w_s = \frac{(m + m_1)gl^3}{48EI} = 0.092 \text{ mm}$, 把有关参数

代入式(22)、式(26)中可得 $(K_d)_{\max} = 28.27505$, $t_d =$

$$= \left(\frac{w_s}{g}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\pi}{2} + \arcsin\left(1 + \frac{2\xi^2 h_0}{w_s}\right)^{-\frac{1}{2}} \right] = 0.0049 \text{ s.}$$

所以 $w_d = w_s \cdot (K_d)_{\max} = 2.6013 \text{ mm}$.

文献[9]实测结果为 $w_d = 2.32 \text{ mm}$, 文献[9-10]理论计算结果分别为 $w_d = 2.74 \text{ mm}$, $w_d = 2.73 \text{ mm}$.

从以上推导及算例1的计算可以看出本文计算得到的最大动位移比文献[9-10]的计算得到的最大动位移更接近文献[9]的实验结果, 至于本文计算得到的最大动位移与文献[9-10]的计算得到的最大动位移存在差异, 主要是本文在计算中采用梁的动量相当质量折算系数来考虑梁质量对冲击的影响, 而文献[9]则是在计算中采用梁的能量相当质量折算系数来考虑梁质量对冲击的影响^[11], 显然本文采用梁的动量相当质量折算系数来考虑梁质量对冲击的影响更合理些.

下面以等高变截面双模量筒支梁为例, 来说明本文方法在研究重物对等高变截面双模量筒支梁冲击问题中的应用.

算例2 某等高变截面双模量筒支梁的计算参数: 截面宽 $b_0 = 20 \text{ mm}$, 梁高 $h = 56 \text{ mm}$, 梁长 $l = 1000 \text{ mm}$, 梁密度 $\rho = 2.4 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, 梁质量 $M = 1.344 \text{ kg}$, $E_1 = 1.86 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$, $E_2 = 2.94 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$, 冲击重物质量 $m = 2.5 \text{ kg}$, 重物距梁中点 $h_0 = 100 \text{ mm}$ 处自由下落对筒支梁进行冲击.

由式(6)可求得 $h_1 = 31.19 \text{ mm}$, $h_2 = 24.81 \text{ mm}$, $D = 6.7862 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{mm}^2$, $m_1 = 1.12 \text{ kg}$, $w_s = \frac{(m + m_1)gl^3}{32D} = 0.1634 \text{ mm}$.

当 $E_1 = E_2 = 1.86 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$, $D_1 = 5.4441 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{mm}^2$, $w_{s1} = \frac{(m + m_1)gl^3}{32D_1} = 0.2036 \text{ mm}$.

当 $E_1 = E_2 = 2.94 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$, $D_2 = 8.6052 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{mm}^2$, $w_{s2} = \frac{(m + m_1)gl^3}{32D_2} = 0.1288 \text{ mm}$.

把有关参数代入式(22)、式(26)中可得

$$(K_d)_{\max} = 25.181, w_d = w_s \cdot (K_d)_{\max} = 4.1146 \text{ mm.}$$

$$(K_{d1})_{\max} = 22.667, w_{d1} = w_{s1} \cdot (K_{d1})_{\max} = 4.6150 \text{ mm.}$$

$$(K_{d2})_{\max} = 28.23, w_{d2} = w_{s2} \cdot (K_{d2})_{\max} = 3.6362 \text{ mm.}$$

$$t_d = \left(\frac{w_s}{g}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\pi}{2} + \arcsin\left(1 + \frac{2\xi^2 h_0}{w_s}\right)^{-\frac{1}{2}} \right] = 0.0066 \text{ s.}$$

$$t_{d1} = \left(\frac{w_{s1}}{g}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\pi}{2} + \arcsin\left(1 + \frac{2\xi^2 h_0}{w_{s1}}\right)^{-\frac{1}{2}} \right] = 0.0073 \text{ s.}$$

$$t_{d2} = \left(\frac{w_{s2}}{g}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\pi}{2} + \arcsin\left(1 + \frac{2\xi^2 h_0}{w_{s2}}\right)^{-\frac{1}{2}} \right] = 0.0058 \text{ s.}$$

对算例2的计算结果及算例1钢筒支梁的动载荷系数曲线图4、算例2等高变截面双模量筒支梁的动载荷系数曲线图5进行分析可知, 把重物对等高变截面双模量筒支梁的冲击问题处理为重物对单弹性模量梁的冲击问题时, 等高变截面双模量筒支梁的最大动位移、动载荷系数、冲击力、冲击时间与单弹性模量梁的最大动位移、动载荷系数、冲击时间的误差很大, 且都超过了11%以上. 所以, 当拉压弹性模量相差较大时, 不能把重物对等高变截面双模量筒支梁的冲击问题简单处理为重物对单弹性模量梁的冲击问题, 必须考虑拉压弹性模量不同的因素对梁冲击问题的影响. 由式(21)、式(22)及算例1钢筒支梁的动载荷系数曲线图4、算例2等高变截面双模量筒支梁的动载荷系数曲线图5可以看出, 等高变截面双模量筒支梁的动位移、动载荷系数、冲击力都是随时间变化的函数, 而能量法仅能给出最大动位移、最大冲击力、最大动载荷系数且不能得到冲击时间的计算公式.

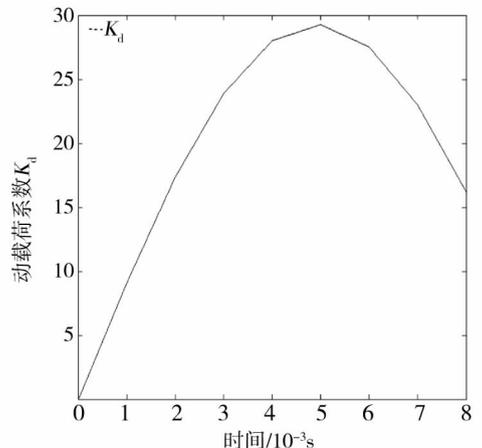


图4 钢梁动载荷系数曲线

Fig. 4 Curve of the dynamic load coefficient of steel beam

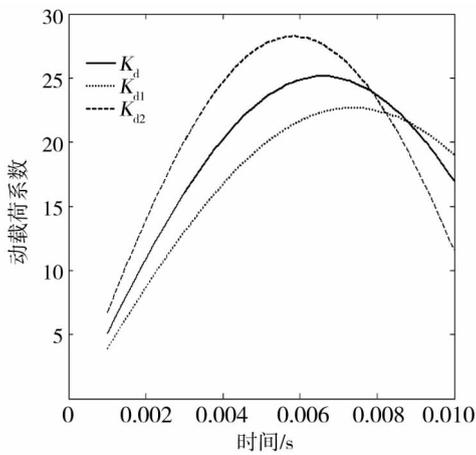


图5 双模量梁动载荷系数曲线

Fig.4 Curve of the dynamic load coefficient of beam with different modulus

本文把被冲击的等高变截面双模量筒支梁简化为一集中质量与无重弹簧相连接的单自由度弹性系统,采用动力学方程推导出了重物对等高变截面双模量筒支梁冲击时的最大动位移公式(15)与文献[9]是一致的.而且,本文推导出了冲击问题的冲击时间及动载荷系数、冲击力随时间变化的函数式,克服了能量法仅能给出最大动载荷系数的缺陷.所以,本文计算方法比能量法更能反映重物对梁冲击问题的本质,同时也克服了Hertz接触理论计算过程复杂繁琐不便工程设计人员在实际工程中应用的不足.从以上计算及分析可知有关材料力学教材及专著给出的最大动载荷系数公式,仅是动力学方程推导出的动载荷系数函数式的特例.

4 结论

1)把被冲击的等高变截面双模量筒支梁简化为一集中质量与无重弹簧相连接的单自由度弹性系统是可行的,本文的计算结果已得到文献[9]实验结果的验证.

2)推导出了冲击问题的冲击时间、动载荷系数、冲击力的函数式,克服了能量法仅能给出最大动载荷系数的缺陷,同时也克服了Hertz接触理论计算过程复杂繁琐不便工程设计人员在实际工程中应用的不足.

3)有关材料力学教材及专著给出的最大动载荷系数公式,仅是动力学方程推导出的动载荷系数

函数式的特例.

参考文献:

- [1] Medri G. A nonlinear elastic model for isotropic materials with different behavior in tension and compression[J]. Transactions of the ASME, 1982, 26(104): 26-28.
- [2] Bert C W, Reddy J N, Chao W C, et al. Vibration of thick rectangular plates of bi-modulus composite material[J]. Journal of Applied Mechanics, 1981, 48(2): 371-376.
- [3] Srinivasan R S, Ramachandra L S. Axisymmetric nonlinear dynamic response of bi-modulus annular plates[J]. Journal of Vibration and Acoustics, 1990, 112(2): 202-205.
- [4] 阿巴尔楚米扬. 不同模量弹性理论[M]. 郭瑞峰, 张允真, 译. 北京: 中国铁道出版社, 1986.
Ambartsumyan S A. Elasticity theory of different modulus[M]. Wu R F, Zhang Y Z, tran. Beijing: China Railway Press, 1986.
- [5] 李战莉, 黄再兴. 双模量泡沫材料等效弹性模量的细观力学估算方法[J]. 南京航空航天大学学报, 2006, 38(4): 464-468.
Li Z L, Huang Z X. Meso-mechanical method for estimating equivalent elastic modulus of foam-solid with double-modulus[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2006, 38(4): 464-468.
- [6] 蔡来生, 俞焕然. 拉压模量不同弹性物质的本构[J]. 西安科技大学学报, 2009, 29(1): 17-21.
Cai L S, Yu H R. Constitutive relation of elastic materials with different elastic moduli in tension and compression[J]. Journal of Xi'an University of Science and Technology, 2009, 29(1): 17-21.
- [7] 罗战友, 夏建中, 龚晓南. 不同拉压模量及软化特性材料的柱形孔扩张问题的统一解[J]. 工程力学, 2008, 25(9): 79-84.
Luo Z Y, Xia J Z, Gong X N. Unified solution for expansion of cylindrical cavity in strain-softening materials with different elastic moduli in tension and compression[J]. Engineering Mechanics, 2008, 25(9): 79-84.
- [8] 吴晓, 黄肿, 孙晋. 双模量悬臂梁在分布荷载作用下的Kantorovich解[J]. 湖南科技大学学报(自然科学版), 2012, 27(2): 55-59.
Wu X, Huang C, Sun J. The Kantorovich solution for bimodulous cantilever under distributed loads[J]. Journal of Hunan University of Science & Technology(Natural Science Edition), 2012, 27(2): 55-59.
- [9] 刁海林. 关于材料力学中一处结论的修正[J]. 力学与实践, 1995, 17(6): 56-57.
Diao H L. A conclusions modification in materials mechanical[J]. Mechanics in Engineering, 1995, 17(6): 56-57.

[10] 周润玉. 考虑受冲击杆质量的动荷系数的讨论[J]. 力学与实践, 1997, 19(3): 59-60.

Zhou R Y. Discussion of factor of dynamic load taking impact rod quality into consideration[J]. Mechanics in Engineering, 1997, 19(3): 59-60.

[11] 杜庆华, 熊祝华, 陶学文. 应用固体力学基础(上册)[M]. 北京: 高等教育出版社, 1987.

Du Q H, Xiong Z H, Tao X W. Application solid mechanics basis [M]. Beijing: Higher Education Press, 1987.

Study of impact problem of bimodulous beam with variable cross sections by single degree of freedom system

WU Xiao

(College of Civil and Architecture Engineering, Hunan University of Arts and Science, Changde 415000, China)

Abstract: The problem of bimodulous beam with equal height and variable cross sections impacted, was studied, by heavy weight. The impacted bimodulous beam of equal height and variable cross sections was simplified as a elastic system with single degree of freedom which composed by a concentrated mass and a spring without weight, thus the problem of beam impacted by heavy weight was simplified as single degree of freedom elastic system with concentrated mass impacted by heavy weight, then function expressions for factor of dynamic load and impact time were derived by dynamic equation, the defects of the energy method, which can only give the maximum factor of dynamic load, was overcome. The analysis of examples indicated that formulas for the maximum factor of dynamic load which given by related literatures is only a special case of function formula for factor of dynamic load that obtained by dynamic equations. The problem of bimodulous beam with equal height and variable cross sections impacted by heavy weight, in which have a larger difference elastic moduli in tension and compression, can not be treated simply as the problem of single - modulus beam with equal height and variable cross sections impacted by heavy weight, the influence of difference elastic moduli in tension and compression must be taken into consideration.

Key words: elastic system; elastic modulus; bimodulous; variable cross sections; beam; impact; factor of dynamic load