

# 带边梁的边悬臂梁的扭矩简化计算

李远<sup>1,2</sup>, 吕伟荣<sup>1</sup>, 胡益民<sup>1</sup>

(1. 湖南科技大学 土木工程学院, 湖南 湘潭, 411201; 2. 驻马店市建筑勘察设计院, 河南 驻马店 463000)

**摘要:**实际工程设计中,带边梁的边悬臂梁在作为重要承重构件时,往往忽略了边梁对边悬臂梁产生的约束力矩,从而使得该边悬臂梁偏于不安全.从约束力矩理论出发,采用正对称结构形式,提出了边梁对边悬臂梁产生的约束力矩的简化计算公式,并通过算例验证了该方法的正确性.通过调整边梁与悬臂梁抗扭线刚度的比值,相应约束力矩的计算结果表明,随着 $\Phi$ 值的增大,约束力矩减小.因此,建议在设计中应尽量增大边梁的截面,以减小悬臂梁的扭矩.

**关键词:**扭矩;正对称结构;边梁;悬臂梁

**中图分类号:**TU227;TU375 **文献标识码:**A **文章编号:**1672-9102(2013)04-0060-04

在实际工程中,经常遇到钢筋混凝土悬臂梁上与其整浇一起的边梁,如图 1 所示.悬臂梁作为重要的承重构件,其端部支座往往按简支或固定考虑,但由于设计中往往没有考虑边梁与悬臂梁之间的协调扭转<sup>[1]</sup>,进而忽略了悬臂梁所受的扭矩,使结构具有一定的安全隐患.为此,对扭矩问题<sup>[2-9]</sup>的研究逐渐增多,不少学者对此提出了相应的计算方法<sup>[3,5,7-8]</sup>,但由于公式过于复杂,不方便应用.为此,本文从约束力矩理论<sup>[3-4,9]</sup>出发,根据带边梁的悬臂梁实际受力情况,采用正对称结构形式,推导出边梁对悬臂梁产生约束力矩的简化计算公式.

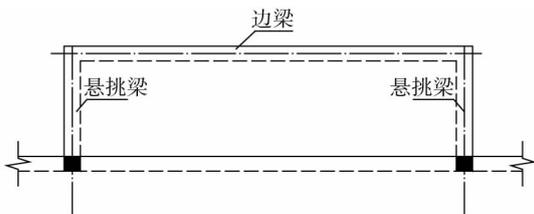


图 1 某带有边梁的悬挑梁的结构布置

Fig. 1 Structural layout of the cantilever beam with side beam

## 1 理论计算

### 1.1 约束力矩概念

在 2 根相交的梁之间,当其中一根梁产生弯曲变形时,与其相交的梁将出现对抗的扭转变形,继而产生扭矩,这种抵抗与自身相交梁弯曲变形的扭矩成为协调扭矩.为此,在本文中定义为边梁对与之相连的悬臂梁产生的约束力矩.

### 1.2 约束扭矩理论计算

首先,假定当边梁受力弯曲变形时,边梁会在端部节点产生转角 $\theta$ ,如图 2 所示.这要求悬臂梁亦发生 $\theta$ 的扭转角,但同时边梁则是对原来固端的放松.假定放松弯矩为 $M^s$ ,则边梁在端部出的负弯矩将由原来的完全固端时的 $M^s$ 减少到现在实际存在的 $M^T$ ,即:

$$M^T = M^s - M^s. \quad (1)$$

$M^T$  既是结点的实际约束力矩,也是悬臂梁的扭矩,对悬臂梁来讲,由材料力学<sup>[9]</sup>可得:

$$\theta = \frac{M^T L}{GI_p}. \quad (2)$$

收稿日期:2012-11-28

基金项目:湖南省教育厅优秀青年项目(10B035)

通信作者:吕伟荣(1974-),男,江西余干人,博士,副教授,主要从事组合结构高层抗震研究. E-mail:lwrxm@126.com

由式(1)可知,只要计算出弯矩  $M^s$ ,就可以得到约束扭矩  $M^T$ ,显然  $M^s$  与边梁两端支座类型有关.考虑到实际工程中,边梁截面较悬臂梁小很多,出于简化考虑,将边梁两端视为固定支座,如图2所示.

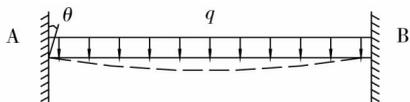


图2 两端固定梁一端有转角的变形图

Fig. 2 Deformation of beam with both fixed supports which one has a node corner

如图3所示,对图1所示的结构进行简化.对于图3的简化,可以考虑悬臂梁对边梁的扭矩可忽略不计,即边梁没有扭矩.为此,将该平面结构进行对称处理,将跨中简化为定向支座,可得  $M_A^s = \frac{1}{3}ql^2$ ;同时对于这种形式的结构,几何关系对称,同时荷载也是正对称的,取如图4的正对称结构进行研究.

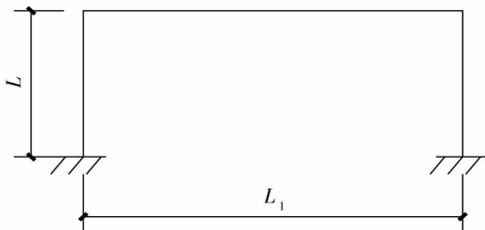


图3 结构布置平面图

Fig. 3 The structure arrangement plan

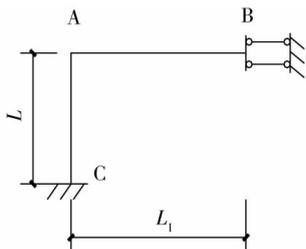


图4 正对称结构

Fig. 4 Symmetric structure

由结构力学知道:  $M_A^s = i_{AB} \cdot \theta_A$ ,将式(2)代入上公式后得:

$$M_A^s = i_{AB} \cdot \theta_A = i_{AB} \frac{M_A^T L}{GI_p}$$

再将  $M_A^s$  代入式(1)得:  $M_A^T = M_A^s - i_{AB} \frac{M_A^T L}{GI_p}$ ,并

由此计算出  $M_A^T = M_A^s - \frac{EI_{AB}L}{GI_p L_{AB}} M_A^T$ ,最后化简整理得

到:

$$M_A^T = \frac{M_A^s}{1 + \frac{EI_{AB}L}{GI_p L_{AB}}} \quad (3)$$

令  $\Phi = \frac{EI_{AB}L}{GI_p L_{AB}}$ ,可得 A 端的约束力矩计算公式:

$$M_A^T = \frac{M_A^s}{1 + \Phi} \quad (4)$$

式中,  $M_A^s$  表示边梁 A 端的固端弯矩;  $\Phi$  表示边梁抗弯线刚度  $i = \frac{EI_{AB}}{L_{AB}}$  与悬臂梁抗扭线刚度  $i_p = \frac{GI_p}{L}$  之比,即  $\Phi = \frac{EI_{AB}L}{GI_p L_{AB}}$ ;  $E$  为混凝土的弹性模量;  $G$  为混凝土的剪切模量,近似取  $G = 0.43E$ ;  $I_{AB}$  为边梁 AB 的截面惯性矩;  $I_n$  为悬臂梁的截面极惯性矩,当为矩形截面时,近似取  $I_p = \alpha b^4$ ,系数  $\alpha$  的大小根据悬臂梁矩形截面高宽比  $m = \frac{h}{b}$  变化而变化.其值大小由表1<sup>[10]</sup>查出;  $L, L_{AB}$  分别为悬臂梁和边梁的计算跨度.

表1 矩形截面极惯性矩系数  $\alpha$

Tab. 1 Coefficient  $\alpha$  of polar moment of inertia of rectangular section

截面高宽比	参数 $\alpha$	截面高宽比	参数 $\alpha$
1.0	0.140	2.0	0.457
1.2	0.199	2.5	0.622
1.5	0.294	3.0	0.790

## 2 算例

如图5所示,钢筋混凝土边梁  $b \times h = 200 \text{ mm} \times 500 \text{ mm}$ ,线荷载  $q = 18 \text{ kN/m}$ ,该悬挑梁的扭矩计算如下:

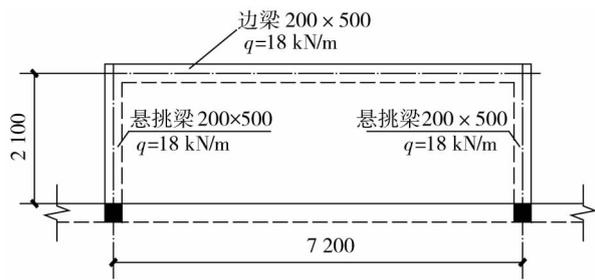


图5 算例平面布置图

Fig. 5 Planar layout graph of example

## 边梁抗弯线刚度

$$i = \frac{EI_{AB}}{L_{AB}} = \frac{200 \times 500^3}{12 \times 3600} E = 578\,703.7E$$

计算悬挑梁抗扭线刚度: 知  $m = 2.5$ , 查表 1 得

$a = 0.622$ , 故悬挑梁抗扭线刚度为

$$i_p = \frac{0.43Eab^4}{L} = 203\,779.05E;$$

$$\Phi = \frac{i}{i_p} = \frac{578\,703.70E}{203\,779.05E} = 2.84;$$

由  $M_A^g = \frac{1}{3}ql^2$ , 可得  $M_A^g = 77.76 \text{ kN} \cdot \text{m}$ .

由式(4)可求出悬挑梁实际所受扭矩  $M_A^T =$

$$\frac{M_A^g}{(1 + \Phi)} = \frac{77.76}{1 + 2.84} = 20.251 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

## 3 有限元验证

### 3.1 有限元建模

采用通用有限元程序 Ansys 建立有限元分析模型<sup>[10]</sup>进行分析, 如图 6 ~ 图 8 所示.

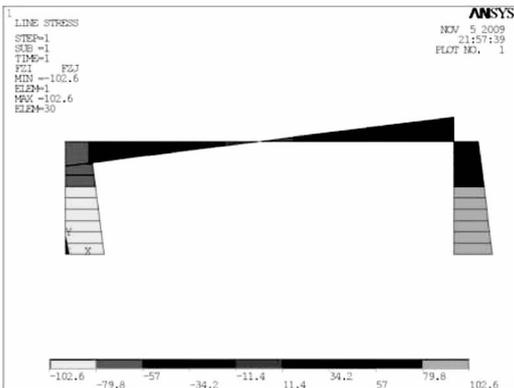


图 6 有限元分析剪力图

Fig. 6 Shear diagram of finite element analysis

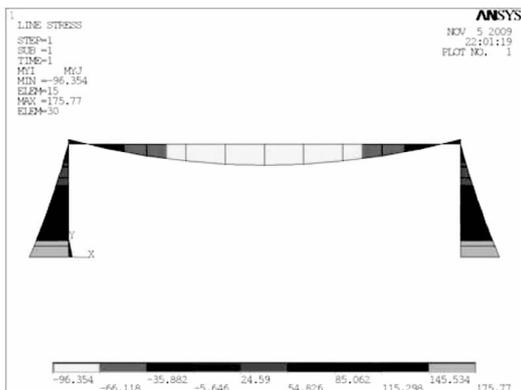


图 7 有限元分析弯矩图

Fig. 7 Moment diagram of finite element analysis

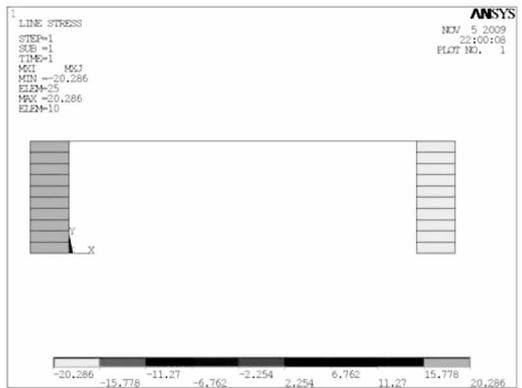


图 8 有限元分析扭矩图

Fig. 8 Torque diagram of finite element analysis

有限元分析参数: beam4 单元模拟悬臂梁及边梁, 悬臂梁端部采用固结, 边梁与悬臂梁节点采用刚接; 边梁与悬臂梁上线荷载为  $18 \text{ kN/m}$ , 混凝土弹性模量采用 C20 的弹性模量  $E = 2.55 \times 10^4 \text{ N/mm}^2$ , 混凝土泊松比取 0.16.

### 3.2 有限元结果分析

剪力、弯矩结果分析: 如图 6 ~ 图 8 所示, 有限元计算结果与结构力学计算结果基本一致, 表明有限元分析正确. 如表 2 所示, 调整边梁截面尺寸, 简化式(4)的计算结果与有限元分析结果极为接近, 误差均在 1% 以内, 完全能满足工程计算要求, 表明本文提出的边梁对悬臂梁产生约束力矩的简化计算式(4)正确, 可应用于实际工程设计.

表 2 悬臂梁的扭矩计算

Tab. 2 Torque calculation of cantilever beam

悬臂梁截面 面 $b \times h$	边梁截面 面 $b \times h$	$\Phi$	扭矩 / ( $\text{kN} \cdot \text{m}$ )		
			式(4)计算结果	有限元分析结果	误差 / %
$0.2 \times 0.5$	$0.2 \times 0.3$	0.613	48.196	48.236	0.08
$0.2 \times 0.5$	$0.2 \times 0.4$	1.454	31.622	31.722	0.31
$0.2 \times 0.5$	$0.2 \times 0.5$	2.840	20.251	20.286	0.17
$0.2 \times 0.5$	$0.2 \times 0.6$	4.907	13.163	13.188	0.19

## 4 结论

1) 本文基于约束力矩理论, 提出带有边梁的悬臂梁的简化扭矩计算公式. 该公式不仅简单, 而且经有限元分析对比结果表明该式的计算精度高, 能满足工程计算要求, 可用于实际工程设计.

2) 该简化扭矩公式得出约束力矩大小同边梁抗弯线刚度与悬臂梁抗扭线刚度之比有关,  $\Phi$  值越

大,约束力矩越小,因此建议在设计中应尽量增大边梁的截面,增大边梁的刚度,以减小悬臂梁的扭矩。

## 参考文献:

- [1] 龙驭球. 结构力学[M]. 北京:高等教育出版社,2006.  
Long Y Q. Structure mechanics[M]. Beijing: Higher Education Press,2006.
- [2] 张艳如,李云贵. 梁扭矩折减系数的取值研究[J]. 建筑结构, 2011,41(增刊):992-997.  
Zhang Y R, Li Y G. The research of beam torsion reduction coefficient[J]. Building Structure, 2011,41(sup):992-997.
- [3] 畅君文. 带有现浇边梁的悬臂梁扭矩计算[J]. 建筑结构,1996(8):51-53.  
Chang J W. Torque calculation of cantilever beam with winding beam[J]. Building Structure, 1996(8):51-53.
- [4] 李玉文,畅君文. 框架边梁设计时抗扭问题的考虑[J]. 建筑科学,1990(3):42-48.  
Li Y W, Chang J W. Consideration about twisting moment in edge beam design of frame[J]. Building Science,1990(3):42-48.
- [5] 王富康. 框架边梁与次梁约束力矩计算[J]. 建筑科学,1994(1):68-73.  
Wang F K. An calculation of constrained moment of frame side beam and second beam[J]. Building Science,1994(1):68-73.
- [6] 张元坤,李盛勇. 刚度理论在结构设计中的作用和体现[J]. 建

筑结构,2003,33(2):6-11.

Zhang Y K, Li S Y. The application and reflect of rigidity theory in structural engineering design[J]. Building Structure,2003,33(2):6-11.

- [7] 刘建民. 主次梁相交主梁中引起的扭矩[J]. 建筑结构,1997(9):59.  
Liu J M. Torque caused by the primary beam at the intersection of primary and secondary beams[J]. Building Structure, 1997(9):59.
- [8] 马建国. 框架边梁附加扭矩的计算[J]. 建筑结构,1994(2):38-40.  
Ma J G. An additional torque calculation of frame side beam[J]. Building Structure, 1994(2):38-40.
- [9] 柳旭,苏猛,史维明. 试析框架边梁与次梁约束力矩[J]. 辽宁工学院学报,1999,19(5):53-56.  
Liu X, Sue M, Shi W M. An analysis of constrained moment of frame side beam and second beam[J]. Journal of Liaoning Institute of Technology,1999,19(5):53-56.
- [10] 孙训芳. 材料力学[M]. 北京:高等教育出版社,2001.  
Sun X F. Mechanics of materials[M]. Beijing: Higher Education Press,2001.
- [11] 王新敏. Ansys 工程结构数值分析[M]. 北京:人民交通出版社,2007.  
Wang X M. Ansys numerical analysis of engineering structure [M]. Beijing: China Communications Press,2007.

# Simplified calculation of torque of cantilever beam with side beam

LI Yuan<sup>1,2</sup>, LV Wei-rong<sup>1</sup>, HU Yi-min<sup>1</sup>

(1. School of Civil Engineering, Hunan University of Science and Technology, Xiangtan 411201, China;

2. Zhumadian Institute of Architectural Exploratory and Design, Zhumadian 463000, China)

**Abstract:** In practical engineering, the cantilever beam with side beams, which is taken as an important bearing component, but constraints torque of side beams is often neglected, tends to unsafety. Through the theory of constraining moment and symmetric structure in symmetrical loading, the simplified calculation formula of the constraints torque was proposed, at the same time its validity and rationality was proved by examples so that it could be used in the actual engineering design. Through changing the ratio of linear stiffness between side beam and cantilever beam, the calculation results indicated that the value decreased along with the parameter  $\Phi$  increasing. So, the designer should be increase the size of side beam section as much as possible for decreasing the value of constraints torque.

**Key words:** torque; symmetric structure; side beam; cantilever beam