第 28 卷 第 4 期　　湖南科技大学学报(自然科学版)　　Vol. 28 No. 4
2013 年 12 月　　Journal of Hunan University of Science & Technology(Natural Science Edition)　　Dec. 2013

具有非线性恶化函数和安装时间的单机排序问题

余英,罗永超

(凯里学院 数学科学学院,贵州 凯里 556011)

摘　要:研究了具有非线性恶化函数的加工时间,同时工件的安装时间与已加工完工件的实际加工时间有关(即 p－s－d)的单机排序问题. 证明了极小化最大完工时间,极小化完工时间和是多项式时间可解的. 另外极小化加权完工时间和,极小化总延误以及极小化最大延误在一定的条件下是多项式时间可解的.

关键词:单机;安装时间;排序;非线性恶化函数

中图分类号:O223　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1672－9102(2013)04－0078－04

在经典排序问题中,工件的安装时间通常被认为与工件顺序无关,即只与工件本身有关. 然而,在有较强背景的实际问题中,工件的安装时间除了跟本身有关外,还与已加工完的工件有关. Koulamas 和 Kyparisis[1] 首先提出了与已加工完的工件的实际加工时间有关的安装时间的模型(简称 p－s－d). 他们证明了极小化最大完工时间,极小化总完工时间和极小化总完工时间差等排序问题是多项式时间可解的. 随后,Biskup 和 Herrmann[2] 研究了与工期相关的带有 p－s－d 安装时间的排序问题. Kuo 和 Yang[3] 讨论了在 p－s－d 安装时间中加入学习效应的排序问题.

1988 年 Gupta 和 Gupta[4] 首先提出线性加工时间的排序问题,他们假设工件的实际加工时间为 $a_j + b_j t(b_j > 0)$,其中 a_j, b_j, t 分别为工件 j 的基本加工时间,恶化率和开始加工时间,并证明了 $\{\frac{a_j}{b_j}\}$ 的非降序为最小化最大完工时间的最优排序. 此后,有许多学者开始研究加工时间非恒定的排序问题[5－11]. Peng J L 和 Wen C L[12] 对具有非线性加工函数的加工时间的单机排序问题进行了研究,他们指出 SPT 序对极小化最大完工时间和极小化总完工时间和问题仍然适用.

本文在文献[12]的基础上,进一步讨论了与已加工完的工件的实际加工时间有关的安装时间的一类排序问题.

1　问题描述

有一工件集 $[1,2,\cdots,n]$ 中的所有工件在零时刻到达,需要在一台机器上进行加工. 对任意工件 j,它的正常加工时间为 p_j,交货期为 d_j 和权为 ω_j. 工件与工件之间有与已加工完的工件的实际加工时间有关的安装时间,即:$S_{[r]}, p^A_{[i]}$. 其中分别表示第 r 个位置的工件的安装时间,排在第 i 个位置的工件的实际加工时间,且 $b > 0, S_{[1]} = 0$. 假如工件 j 排在第 r 个位置,那么它的实际加工时间为 $p_{j[r]} =$

收稿日期:2013－06－20
基金项目:凯里学院科研基金资助项目(Z1215)
通信作者:余英(1981－),女,浙江桐庐人,硕士,讲师,主要从事排序理论和组合最优化研究. E－mail:1135227559@.qq.com

$p_jf(\sum_{k=1}^{r-1}p_{[k]},r)$，对 $j,r=1,2,\cdots,n$. 其中 $f:[0,M]\times[1,\infty]\to[1,\infty]$ 的一个可微函数. 对任意的 x 和任意固定的 y_0，$f_x(x,y_0)$ 是一个非增函数，且对任意的 x,y 和 $0\leqslant B\leqslant M$，有 $f_x(B+x,y)\geqslant\frac{f(B+x,y)}{x}$ 成立.

2　预备引理

引理 1 若对任意的 x 和任意固定的 y_0，$f_x(x,y_0)$ 是一个非增函数，且对任意的 x,y 和 $0\leqslant B\leqslant M$，有 $f_x(B+x,y)\geqslant\frac{f(B+x,y)}{x}$ 成立，则对任意的 $x_1\geqslant x_2$，y 和 $0\leqslant B\leqslant M$，有以下式子成立：$x_1f(B+x,y)-x_2f(B+x_1,y)\leqslant 0$.

证明 根据定积分的微分中值定理，有 $\frac{f(B+x_1,y)-f(B+x_2,y)}{x_1-x_2}=f_x(B+\xi,y)$，其中 $\xi\in[x_1,x_2]$，由于 $f_x(x,y_0)$ 是一个非增函数，所以 $f_x(B+\xi,y)\geqslant f_x(B+x_2,y)$. 又因为对任意的 x,y 和 $0\leqslant B\leqslant M$，$f_x(B+x,y)\geqslant\frac{f(B+x,y)}{x}$ 成立，所以 $f_x(B+x_2,y)\geqslant\frac{f(B+x_2,y)}{x_2}$，因此 $x_1f(B+x,y)-x_2f(B+x_1,y)\leqslant 0$.

3　主要定理

在阐述定理之前，先来做一些准备工作.

设工件序 $S=(\pi,i,j,\pi')$，交换工件序 S 中的工件 i 和工件 j 的位置得到新的工件序 $S'=(\pi,j,i,\pi')$. 在工件序 S 中，工件 i 排在第 r 个位置，且工件序 π 的完工时间为 A，工件 i 安装时间为 $S_{[r]}$. 工件 j 排在第 $r+1$ 个位置，其安装时间为

$$S_{[r+1]}=b\sum_{i=1}^{r}p_{[i]}=b[\frac{S_{[r]}}{b}+P_if(\sum_{k=1}^{r-1}p_{[k]},r)]=S_{[r]}+bP_if(\sum_{k=1}^{r-1}p_{[k]},r).$$

$$C_i(S)=A+S_{[r]}+p_if(\sum_{k=1}^{r-1}p_{[k]},r).\tag{1}$$

$$C_j(S)=A+2S_{[r]}+p_i(1+b)f(\sum_{k=1}^{r-1}p_{[k]},r)+p_jf(\sum_{k=1}^{r-1}p_{[k]}+p_i,r+1).\tag{2}$$

$$C_j(S')=A+S_{[r]}+p_jf(\sum_{k=1}^{r-1}p_{[k]},r).\tag{3}$$

$$C_i(S')=A+2S_{[r]}+p_j(1+b)f(\sum_{k=1}^{r-1}p_{[k]},r)+p_if(\sum_{k=1}^{r-1}p_{[k]}+p_j,r+1).\tag{4}$$

首先考虑极小化最大完工时间问题.

定理 1　对于问题 $1|p_{j[r]}=p_jf(\sum_{k=1}^{r-1}p_{[k]},r),S_{psd}|C_{\max}$，SPT 序排列得到最优序.

证明　用交换相邻工件对的方法来证明. 假设 $p_j\geqslant p_i$，为了证明工件序 S 优于工件序 S'，需要证明以下问题：$C_j(S)\leqslant C_i(S')$. 由式(2)和式(4)得到

$$C_j(S)-C_i(S')=(b+1)(p_i-p_j)f(\sum_{k=1}^{r-1}p_{[k]},r)+p_jf(\sum_{k=1}^{r-1}p_{[k]}+p_i,r+1)-p_if(\sum_{k=1}^{r-1}p_{[k]}+p_j,r+1)$$

在上式中，令 $B=\sum_{k=1}^{r-1}p_{[k]}$，$x_1=p_i$，$x_2=p_j$，以及 $y=r+1$，由 $p_j\geqslant p_i$ 以及引理 1 可以得到 $C_j(S)-C_i(S')\leqslant 0$，所以 $C_j(S)\leqslant C_i(S')$，定理得证.

定理 2　对于问题 $1|p_{j[r]}=p_jf(\sum_{k=1}^{r-1}p_{[k]},r),S_{psd}|\sum_{j=1}^{n}C_j$，SPT 序排列得到最优序.

证明　假设 $p_j\geqslant p_i$，为了证明工件序 S 优于工件序 S'，需要证明以下 2 个问题：

1) $C_i(S)\leqslant C_j(S')$；

2) $C_j(S)+C_i(S)\leqslant C_i(S')+C_j(S')$.

由式(1)和式(3)得到 $C_i(S)-C_j(S')=(p_i-p_j)f(\sum_{k=1}^{r-1}p_{[k]},r)$，由 $p_j\geqslant p_i$ 可知，$C_i(S)\leqslant C_j(S')$ 成立，下面来证明第二个问题. 由定理 1 有 $C_j(S)\leqslant C_i(S')$，综合可得有 $C_j(S)+C_i(S)\leqslant C_i(S')+C_j(S')$ 成立，定理得证.

由于最小化加权完工时间和在一般情况下比较难求其最优序，下面在工件加工时间和工件权之间满足一致性条件下给出最优序. 也就是，，对 $i,j=1,2,\cdots,n$. 同时取 $b=\min\{\frac{p_j}{p_i}|i,j=1,2,\cdots,n;p_j\geqslant p_i\}$.

定理 3　对于问题 $1|p_{j[r]}=p_jf(\sum_{k=1}^{r-1}p_{[k]},r),S_{psd}|\sum_{j=1}^{n}C_j$，在工件加工时间和工件权之间满足一致性条件下，WSPT 排列得到最优序.

证明　假设对 $i,j=1,2,\cdots,n$，有 $\frac{p_j}{p_i}\geqslant 1\geqslant\frac{\omega_j}{\omega_i}$. 因为 $p_j\geqslant p_i$，所以 $\omega_j\leqslant\omega_i$. 从式(1)到式(4)，可以得到

$$[\omega_jC_j(S')+\omega_iC_i(S')]-[\omega_jC_j(S)+\omega_iC_i(S)]=$$
$$\omega_j(p_j-(b+1)p_i)f(\sum_{k=1}^{r-1}p_{[k]},r)+$$
$$\omega_i(p_j(b+1)-p_i)f(\sum_{k=1}^{r-1}p_{[k]},r)+$$

$S_{[r]}(\omega_i-\omega_j)+\omega_i p_j f(\sum_{k=1}^{r-1}p_{[k]}+p_j,r+1)-$

$\omega_j p_j f(\sum_{k=1}^{r-1}p_{[k]}+p_i,r+1)\geqslant$

$\omega_j(p_j-(b+1)p_i)f(\sum_{k=1}^{r-1}p_{[k]},r)+\omega_i(p_j(b+1)-$

$p_i)f(\sum_{k=1}^{r-1}p_{[k]},r)$

由 $b=\min\{\frac{p_j}{p_i}-1\mid i,j=1,2,\cdots,n;p_j\geqslant p_i\}$，$p_j\geqslant p_i,\omega_j\leqslant\omega_i$ 以及引理1可以得到

$\geqslant 0$. 定理得证.

由于总延误时间问题在一般情况下的最优解比较难求. 下面我们在工件加工时间和工期满足一致性条件下给出最优解，也就是，对任意的 $i,j=1,2,\cdots,n$ 有 $d_i\leqslant d_j\Rightarrow p_i\leqslant p_j$.

定理4 在工件的加工时间和工期满足一致性条件的情况下，EDD 规则可以得到问题

$1\mid p_{j[r]}=p_j f(\sum_{k=1}^{r-1}p_{[k]},r),S_{psd}\mid\sum_{j=1}^{n}T_j$ 的最优解.

证明 在工件序 S 和工件 S' 中，前 $r-1$ 个工件由于它们具有相同的工序，所以相应的目标函数相等. 由定理1可知在工件序 S 中部分序 π' 所对应的目标函数值优于在工件序 S' 中部分序 π' 所对应的目标函数值，所以只需证明 $T_i(S)+T_i(S)\leqslant T_j(S')+T_i(S')$. 下面分2种情况来证明.

情形1 $A+S_{[r]}+p_j f(\sum_{k=1}^{r-1}p_{[k]},r)\leqslant d_j$，由式(1)到式(4)有

$T_i(S)+T_j(S)=\max\{A+p_i f(\sum_{k=1}^{r-1}p_{[k]},r)+$

$S_{[r]}-d_i,0\}+\max\{A+p_i(b+1)f(\sum_{k=1}^{r-1}p_{[k]},r)+$

$2S_{[r]}+p_j f(\sum_{k=1}^{r-1}p_{[k]}+p_i,r+1)-d_j,0\}$

和 $T_j(S')+T_i(S')=\max\{A+p_j f(\sum_{k=1}^{r-1}p_{[k]},r)+$

$S_{[r]}-d_j,0\}+\max\{A+p_j(b+1)f(\sum_{k=1}^{r-1}p_{[k]},r)+$

$2S_{[r]}+p_i f(\sum_{k=1}^{r-1}p_{[k]}+p_j,r+1)-d_i,0\}$

注意到，最坏的情况是 $T_i(S)$ 和 $T_j(S)$ 都不为0. 因为它包含了 $T_i(S)$ 和 $T_j(S)$ 中有一个为0或者2个都为0的情形的证明. 所以，以下假设 $T_i(S)$ 和 $T_j(S)$ 都不为0. 由定理1以及 $d_i\leqslant d_j$，有

$\{T_j(S')+T_i(S')\}-\{T_i(S)+T_j(S)\}=(b+1)f(\sum_{k=1}^{r-1}p_{[k]},r)(p_j-p_i)+$

$p_i f(\sum_{k=1}^{r-1}p_{[k]}+p_j,r+1)-p_j f(\sum_{k=1}^{r-1}p_{[k]}+p_i,r+1)$

$\geqslant 0$

所以在第一种情形下有 $\{T_j(S')+T_i(S')\}\geqslant\{T_i(S)+T_j(S)\}$ 成立.

情形2 $A+S_{[r]}+p_j f(\sum_{k=1}^{r-1}p_{[k]},r)\geqslant d_j$，由式(1)到式(4)有

$T_i(S)+T_j(S)=\max\{A+p_i f(\sum_{k=1}^{r-1}p_{[k]},r)+$

$S_{[r]}-d_i,0\}+\max\{A+p_i(b+1)f(\sum_{k=1}^{r-1}p_{[k]},r)+$

$2S_{[r]}+p_j f(\sum_{k=1}^{r-1}p_{[k]}+p_i,r+1)-d_j,0\}$

和 $T_j(S')+T_i(S')=2A+(b+2)p_j f(\sum_{k=1}^{r-1}p_{[k]},r)+3S_{[r]}+p_i f(\sum_{k=1}^{r-1}p_{[k]}+p_j,r+1)-d_i-d_j$

注意到，最坏的情况是 $T_i(S)$ 和 $T_j(S)$ 都不为0. 因为它包含了 $T_i(S)$ 和 $T_j(S)$ 中有一个为0或者2个都为0的情形的证明. 所以，以下假设 $T_i(S)$ 和 $T_j(S)$ 都不为0. 由定理1以及 $d_i\leqslant d_j$，有

$\{T_j(S')+T_i(S')\}-\{T_i(S)+T_j(S)\}=$

$(b+2)f(\sum_{k=1}^{r-1}p_{[k]},r)(p_j-p_i)+$

$p_i f(\sum_{k=1}^{r-1}p_{[k]}+p_j,r+1)-$

$p_j f(\sum_{k=1}^{r-1}p_{[k]}+p_i,r+1)\geqslant 0$

所以在第二种情形下有 $\{T_j(S')+T_i(S')\}\geqslant\{T_i(S)+T_j(S)\}$ 成立.

定理5 在工件的加工时间和工期满足一致性条件的情况下，EDD 规则可以得到问题

$1\mid p_{j[r]}=p_j f(\sum_{k=1}^{r-1}p_{[k]},r),S_{psd}\mid T_{max}/L_{max}$ 的最优解.

证明 同定理4.

4 结论

本文对具有非线性恶化函数和工件的安装时间与已加工完工件的实际加工时间有关(即 p－s－d)的排序问题进行了研究. 主要对单机的相关目标函数进行研究. 读者可以进一步研究单机的一般情况下的极小化加权完工时间和，极小化总延误以及极小化最大延误，以及多机的相关排序问题.

参考文献:

[1] Koulamas C, Kyparisis G J. Single－machine scheduling problem with past－sequence－dependent setup times [J]. European Journal

of Operational Research, 2008, 187(3): 1045 - 1049.

[2] Biskup D, Hermann J. Single - machine scheduling against due dates with past - sequence - dependent setup times[J]. European Journal of Operational Research, 2007, 178(2): 402 - 407.

[3] Kuo W H, Yang D L. Single - machine group scheduling with a time - dependent learning functions [J]. European Journal of Operational Research, 2008, 187(1): 68 - 72.

[4] Gupta J N D, Gupta S K. Single facility scheduling with nonlinear processing times[J]. Computer and Industrial Engineering, 1998, 14(4): 387 - 393.

[5] Mosheiov G. V - shaped policies for scheduling deteriorating jobs [J]. Operations Research, 1991, 39(6): 979 - 991.

[6] Zhao C L, Zhang Q L, Tang H Y. Scheduling problem under linear deterioration[J]. Acta Automatica Sinica, 2003, 29(5): 703 - 708.

[7] Biskup D. Single - machine Scheduling with learning considerations [J]. European Journal of Operational Research, 1999, 115(1): 173 - 178.

[8] Kuo W H, Yang D L. Minimizing the total completion time in a single - machine scheduling problem with a time - dependent learning effect[J]. European Journal of Operational Research, 2006, 174(2): 1184 - 1190.

[9] Sun L. Single - machine scheduling problems with deteriorating jobs and learning effects[J]. Computer and Indusrial engineering, 2009, 57(3): 843 - 846.

[10] Cheng M B, Sun S J. The single - machine scheduling problems with deteriorating jobs and learning effect[J]. Journal of Zhejiang University - Science A(Applied Physics & Engineering), 2006, 7(4): 597 - 601.

[11] 杨东红. 单机架炉卷轧机张力控制模型辨识及仿真[J]. 湖南科技大学学报(自然科学版), 2008, 23(3): 41 - 45.
Yang D H. Identification and simulation for tension control model of single stand steckel hot rolling mill [J]. Journal of Hunan University of Science & Technology(Natural Science Edition), 2008 ,23(3): 41 - 45.

[12] Lai P J, Lee W C. Single - machine scheduling with a nonlinear deterioration function[J]. Information Processing Letters, 2010, 110(11): 455 - 459.

Scheduling with a nonlinear deterioration function and setup time in a single machine

YU Ying, LUO Yong - chao

(Department of Mathematical Sciences, Kaili college, Kaili 556011, China)

Abstract: The single machine scheduling with a nonlinear deterioration function processing time and the past-sequence-dependent (p-s-d) setup time was considered. The problem was proved to minimize the makespan, total completion time were polynomial time solvable. In addition, the problem to minimize the total weighted completion time, the total tardiness and the maximum lateness were polynomial time solvable under certain condition.

Key words: single machine; setup time; scheduling; nonlinear deterioration function