航空瞬变电磁一维正演的连分式算法研究

龙剑波,强建科

(中南大学 地球科学与信息物理学院,有色金属成矿预测教育部重点实验室,湖南 长沙 410083)

摘　要:针对快速 Hankel 变换精度不高的问题,改进了连分式算法,使之能够计算余弦变换,并与快速汉克尔变换算法作了比较,结果表明:无论是计算积分收敛或核函数快速衰减的余弦变换,还是计算核函数震荡增加的发散型 Hankel 积分时,连分式算法都具有精度高、计算稳定的特点,而滤波法计算核函数震荡增加的发散型 Hankel 积分的误差较大. 最后,把连分式算法应用于航空瞬变电磁一维正演模拟计算,得到了满意的瞬变响应,其计算精度、速度和稳定性很好,为瞬变电磁模拟计算提供了一种新的计算方法.

关键词:余弦变换;连分式;数值计算;瞬变电磁场

中图分类号:P631.325 P631.326　**文献标识码**:A　**文章编号**:1672 - 9102(2013)04 - 0086 - 06

在瞬变电磁场理论计算中,磁场值是与观测参数感应电动势密切相关的物理量,磁场分量的高精度数值求解是瞬变电磁法正演研究和反演解释的重要一环,其在一维理论计算式中往往表现为 Hankel 积分或变换形式[1]. 以中心回线瞬变电磁 2.5 维有限元数值模拟为例,矩形线源在背景模型上产生的垂直磁场分量 H_z 求解中,目前应用较多的一个方法是将其化为拉氏傅氏域下的一个余弦变换,对该余弦变换进行求解之后,需进行反傅氏变换(可转换为余弦变换),完成之后可用数值微分求解感应电动势. 在以上过程中,计算的积累误差会对最终结果产生严重影响,特别是 2 次余弦变换的误差不容忽视.

余弦变换是 Hankel 变换的一种特例,属于高震荡函数积分. 在震荡因子 k 很大时,余弦变换的精确数值计算会变得非常困难,原因是 $\sin(kx)$ 或 $\cos(kx)$ 函数值震荡得很强烈,用一般的直接数值积分公式去计算不易得到需要的数值精度[2]. 考虑到余弦变换的强震荡性,国内外学者提出了各种计算方法,如 Filon 方法[3]、折线逼近法[4]、复积分法[5]以及数字滤波法[6]等. Filon 方法是一种较早的直接数值求积方法,一般分段越多,精度越高,在达到相同精度的计算时,计算量随着 k 的增大会明显增加,目前已经较少直接应用;折线逼近法利用分段插值函数近似原函数,然后在每一分段内进行数值求积,理论上逼近精度可以足够高,但逼近步长很难控制,须视核函数的实际情况处理. 现在地球物理电磁法中常用的是基于线性卷积理论的数字滤波法(Digital Filter),又称为快速汉克尔变换(Fast Hankel Transform),该法首先由 Ghosh 于 1971 年引入地球物理电法勘探正演计算[7],之后得到了许多改进和应用,并已经成为地球物理中汉克尔变换计算的主要方法. 线性滤波法一般在低频时或积分核快速收敛时具有速度快、精度高的优点,但在高频场的计算,因核函数的震荡性,计算结果会有较大的误差,特别是在积分核不收敛时,往往得不到正确的结果; Chave(1983)用连分式算法(continued - fraction)高精度地计算了整数阶第一类贝赛尔函数的汉克尔变换[8],弥补了前者的不足. Anderson

收稿日期:2013 - 04 - 17
基金项目:国家自然科学基金项目(41174104);国家高科技发展计划项目(863 - 2006AA06A205 - 5 - 4,2007AA06Z134);深部探测技术与实验研究专项联合资助(Sinoprobe - 03 - 02 - 04)
通信作者:强建科(1967 -),男,陕西岐山人,博士,副教授,主要从事地球物理电磁法正、反演研究. E - mail:qiangjianke@163.com

(1989)结合数字滤波法和 Chave - 连分式算法,在低频时采用数字滤波,而在高频时采用 Chave - 连分式算法,以保证计算的速度及精度[9].

基于上述原因,本文以 Chave 连分式算法为基础,将其修改使之能直接计算余弦变换,目的是在比较大的震荡因子范围内(即 k 值范围)计算余弦变换,研究该算法计算余弦变换的精度及速度,进而分析其在航空瞬变电磁法一维正演计算的效果,并与滤波法结果作了比较.

1 理论

Hankel 变换(Hankel transform)的标准形式一般可写为

$$f(k) = \int_0^{+\infty} x \cdot f(x) \cdot J_v(kx)\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

式中,$J_v(kx)$ 是 v 阶第一类 Bessel 函数,v 为实数且 $v > -1$. $xf(x)$ 称为核函数. 余弦变换(Cosine transform)的形式为

$$f_c(k) = \int_0^{+\infty} g(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x. \tag{2}$$

根据关系式[10]

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m)!}x^{2m} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos(x). \tag{3}$$

可将上述余弦变换化为含 -1/2 阶第一类 Bessel 函数的 Hankel 变换形式:

$$F_c(k) = \sqrt{\frac{\pi k}{2}}\int_0^{+\infty} g(x) J_{-\frac{1}{2}}(kx)\,\mathrm{d}x. \tag{4}$$

上式右端的积分项即是式(1)的形式,可利用修改的连分式算法求解. 而当式(1)中 v 为 0 或 1 时(即整数阶),其积分可直接用原来的连分式算法求解.

直接数值求积相对于线性滤波法的一个重要优势就是可以给出误差估计. 计算时,可根据需要先设定一定的相对误差限(RERR)和绝对误差限(AERR)来控制计算过程的局部误差,并以此来判断是否终止计算,终止条件为

$$|\text{local error}| \leqslant \text{RERR} \cdot |\text{result}| + \text{AERR}. \tag{5}$$

局部误差(local error)为两相邻次数求积的结果之差,result 为其中后一次的求积结果.

连分式计算方法本质上属于直接数值求积法. 相对于一般的直接积分,Chave 连分式算法(以下简称 CCF)优势为[8]:1)使用交错高斯求积公式计算,使得当需要增加求积阶数以达到给定精度时无需重复计算核函数值;2)运用连分式展开来累加部分积分和,使慢收敛序列或发散序列的求和变得容易,加快了收敛速度.

余弦变换或汉克尔变换的连分式数值求积主要原理是先将积分式的无穷积分区间划分为有限个子区间 (Z_n, Z_{n+1}),然后在每个子区间内利用高斯数值求积公式计算下式:

$$p_n = \int_{z_n}^{z_{n+1}} \hat{g}(x) \cdot J_v(kx)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{j=1}^{N} h_j \hat{g}(a_j) \cdot J_v(ka_j). \tag{6}$$

这里 Z_n 为第 n 个被 k 归一化后的 Bessel 函数零点,N 为高斯求积阶数,a_j 和 $h_j(j = 0,1,2\cdots,N)$ 分别为优化后的横坐标值和权系数,阶数越高,积分结果的精度越高,一般最大阶数不超过 7 阶. 如此,得到部分积分项 $p_i(i = 1,2,\cdots\cdots,n)$ 值,再用连分式展开的方法求得部分积分项之和:

$$s = \sum_{i=1}^{n} p_i = \cfrac{d_1}{1 + \cfrac{d_2}{1 + \cfrac{d_3}{\cfrac{\vdots}{d_n}}}}. \tag{7}$$

式中的连分式系数 d_i 可根据 p_i 值计算得到[11],计算连分式的值时,从分式底部开始向上递推计算,从而得到 s 值(即 result),即原部分积分的近似值. 重复上述过程,直到满足式的终止判断标准为止.

2 数值试验

2.1 积分算例

王华军[1]和蒋淑芬[12]分别用线性滤波法和复积分法对有解析解的李普希兹积分(Lipschitz Integral)进行了数值计算,李普希兹积分表达式:

$$F_c(k) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-ax}\cos(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{a}{a^2 + k^2}. \tag{8}$$

前者(积分中令 $a = 0.005$)用 401 个滤波系数对该积分进行计算,得到了在 k 值范围为 $[10^{-10} \sim 10^{5.4}]$ 之间计算误差小于 0.5% 的结果,但线性滤波的系数(文中给出了 250 个余弦变换系数)并不能“放之四海而皆准”,需要根据所求积分精心设计,一般系数越多,计算精度越高,在计算随积分变量不快速衰减的核函数时往往不令人满意,特别是收敛慢甚至发散的积分;而后者(积分中令 $a = 50$)只是针对比较大的 k 值进行了探讨($k > 100$ 时最大相对误差数量级为 10^{-6},$k < 100$ 后误差呈指数增长). 下面本文用改进的连分式算法对李普希兹积分进行数值计算.

利用式可将李普希兹积分化为

$$F_c(k) = \sqrt{\frac{\pi k}{2}}\int_0^{+\infty} \sqrt{x} \cdot \mathrm{e}^{-ax} \cdot J_{-\frac{1}{2}}(kx)\,\mathrm{d}x. \tag{9}$$

1) 取 $a = 0.005$, $RERR = 1.0 \times 10^{-16}$ 时,计算的结果如图 1 所示:

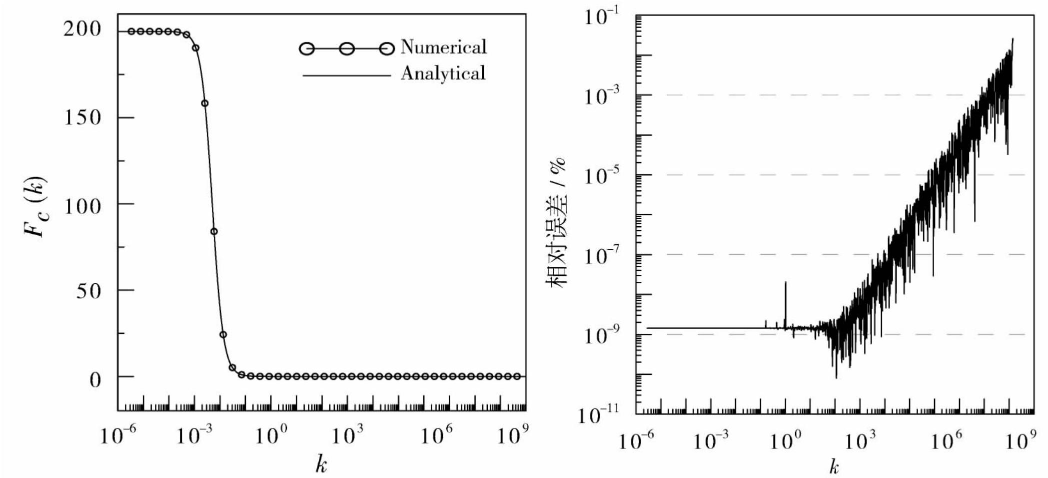

图 1　积分式的数值解与解析解对比(左)及相对误差曲线(右)($a=0.005$)

Fig. 1 Numerical and analytical results of integral (8) (left) and the relative error curve (right) ($a=0.005$)

计算结果表明,在 $k=[10^{-6} \sim 10^{9}]$ 范围内,积分的数值解和解析解的百分相对误差在 $k=10$ 之前稳定在 10^{-9} 左右;之后近似线性震荡增加到 0.02 左右,相对误差最大值不超过 0.03%,说明其数值精度很高.

2)取 $a=50.0$,$\mathrm{RERR}=1.0\times10^{-16}$ 时,计算结果如下:

由图 2 结果可以看到,当 $a=50.0$ 时,在 $k=[10^{-2} \sim 10^{10}]$ 内,计算结果的数值解与其解析解的相对误差不超过 2%,在 $k=[10^{-2} \sim 10^{5}]$ 间相对误差保持在约 10^{-9}% 的水平,可见该数值结果在较广的震荡因子范围相当稳定. 当 k 大于 10^{9} 时,相对误差迅速从 10^{-6}% 升至 0.5% 甚至后面的 2%,其原因是计算机内部运算出现明显的截断误差(两非常小的数相减,此时积分值的数量级接近 10^{-20}),导致误差增大.

上例中,李普希兹积分的核函数属于快速衰减型(e^{-ax}),对于发散型积分的数值计算,为比较连分式算法与线性滤波法的计算效果,考虑如下已知的积分:

$$\int_0^{+\infty} xJ_0(kx)\,\mathrm{d}x = 0. \qquad (10)$$

该积分的被积函数是核函数 x 与 Bessel 函数的乘积 $E(x)=xJ_0(kx)$, $E(x)$ 随着 x 的增大呈现高度震荡增加的形态(见图 3),分别用已发表的 120 点数字滤波系数(Guptasarma and Singh,1997)和本文算法($\mathrm{RERR}=10^{-10}$)在 $k=[10^{-2} \sim 10^{8}]$ 间计算该积分,结果曲线图显示于图 4,表 1 给出了结果中前 20 项的值.

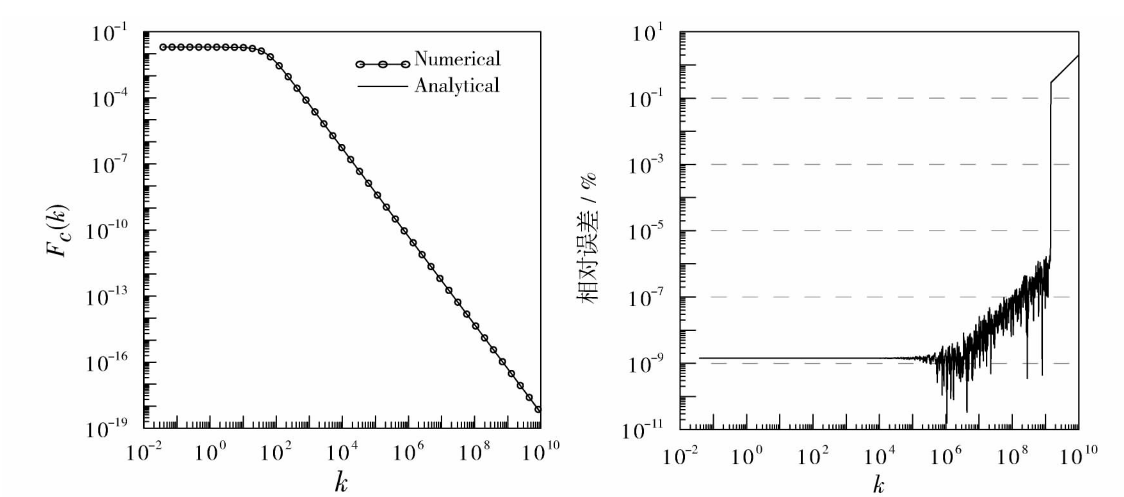

图 2　积分式的数值解与解析解对比(左)及相对误差曲线(右)($a=50.0$)

Fig. 2 Numerical and analytical results of integral (left) and the relative error curve (right)($a=50.0$)

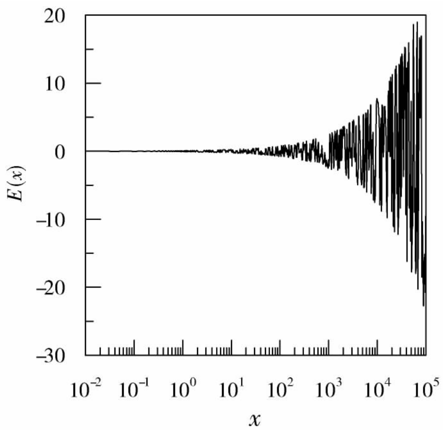

图 3　函数 $E(x)$ 的形态($k=100$)

Fig. 3 Behavior of function $E(x)$ ($k=100$)

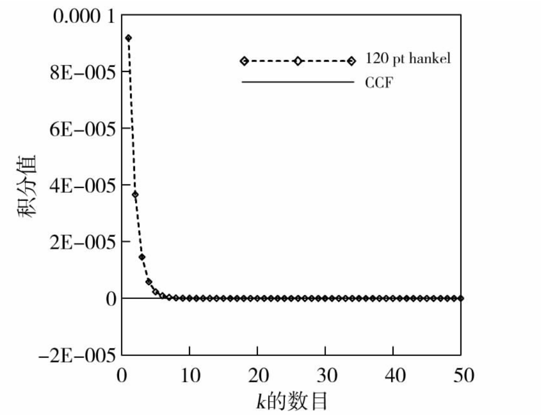

图 4　2 种方法计算积分(10)的结果

Fig. 4 Computation results of integral by fraction algorithm and 120 - points filter method

表 1　120 点滤波法和连分式算法计算积分的结果中前 20 项的值

Tab. 1 Forward 20 values of estimating integral with 120pt digital filter and Fraction algorithm respectively

Number	k	120 - pt value	CCF value	Real value
1	0.02	0.918 608 654 7E - 04	-0.969 428 715 8E - 10	0
2	0.03	0.365 704 679 0E - 04	-0.912 213 587 6E - 11	0
3	0.04	0.145 589 658 2E - 04	-0.167 611 737 8E - 10	0
4	0.06	0.579 602 875 1E - 05	-0.675 615 267 1E - 11	0
5	0.10	0.230 744 069 0E - 05	-0.244 616 331 6E - 11	0
6	0.16	0.918 608 617 6E - 06	-0.118 094 035 5E - 11	0
7	0.25	0.365 704 693 7E - 06	-0.359 622 639 7E - 12	0
8	0.40	0.145 589 664 6E - 06	-0.159 929 522 2E - 12	0
9	0.63	0.579 602 893 7E - 07	-0.159 589 768 2E - 12	0
10	1.00	0.230 744 054 9E - 07	0.876 634 033 3E - 13	0
11	1.58	0.918 608 614 4E - 08	0.339 960 978 0E - 13	0
12	2.51	0.365 704 690 0E - 08	-0.126 464 362 5E - 12	0
13	3.98	0.145 589 662 6E - 08	-0.507 304 790 2E - 13	0
14	6.31	0.579 602 870 4E - 09	0.927 997 756 4E - 13	0
15	10.00	0.230 744 070 4E - 09	0.368 202 871 6E - 13	0
16	15.85	0.918 608 635 5E - 10	-0.108 137 988 4E - 12	0
17	25.12	0.918 608 635 5E - 10	-0.430 620 860 9E - 13	0
18	39.81	0.145 589 657 6E - 10	0.829 681 772 5E - 13	0
19	63.10	0.579 602 893 7E - 11	0.330 310 599 3E - 13	0
20	100.00	0.230 744 058 8E - 11	-0.936 033 941 3E - 13	0

由于该积分的真实值为 0,故此处未计算两者的相对误差. 从图 4 和表 1 中结果可以看到,连分式算法的结果和滤波法的结果在 $k=[10^{1.2}\sim10^{8}]$ 间与真实解吻合较好,但在 $k=[10^{-2}\sim10^{1.2}]$ 时,滤波法的误差迅速增大,最大误差达到了 9×10^{-5},这说明此例中,与滤波法相比,连分式计算强震荡发散积分时仍具有精度高、稳定性好的特点.

2.2　理论模型算例

文献[13 - 14]采用偶极 - 偶极装置详细研究了典型层状大地(1 - D)模型上时间域航空电磁的正演响应,这里,本文基于上述文献里的理论计算公式(s 域)

$$H_z^z(s)=\frac{m}{4\pi s}\int_0^{+\infty}[\mathrm{e}^{u_0(z-h)}+r_{\mathrm{TE}}\mathrm{e}^{-u_0(z+h)}]\cdot\frac{X^3}{u_0}\cdot J_0(Xr)\,\mathrm{d}X. \tag{11}$$

实际计算时,上述积分核函数为

$$E(X)=r_{\mathrm{TE}}\mathrm{e}^{-X(z+h)}X^2. \tag{12}$$

这里,m 是发射磁矩,s 是拉氏变量,此处均取为 $s=$

1 000. $r_{TE} = r_{TE}(X)$ 为 TE 模式下反射系数. 3 层模型及装置参数取为:$\rho_1 = 100, \rho_2 = 20, \rho_3 = 300$ Ωm;$d_1 = 50, d_2 = 100$ m;发射线圈(水平)有效面积 = 接收线圈(水平)有效面积 = 1 m^2,发射阶跃电流 = 1 A,发射高度 $h = 40$ m,接收高度 $z = 30$ m,偏移距分别取 $r = 50$ m 和 $r = 5$ m. 图5是核函数随积分变量变化的曲线,其幅值在 $X > 0.01(m^{-1})$ 时迅速衰减至0,原因是 r_{TE} 和指数项分别衰减到0. 在时间 $t = 10^{-2} \sim 10$ ms 之间对数等间隔取14个采样点,分别采用修改的连分式算法($RERR = 10^{-6}$)和滤波法计算3层模型的瞬变响应(此处为垂直方向上磁感应强度对时间的导数),得到响应曲线如图6(双对数).

从图中结果可以看到,连分式算法与120点滤波法(Guptasarma and Singh,1997)计算的响应曲线形态基本一致,两者都明显地反映出了中间低阻层的瞬变响应,即感应电动势衰减速率变缓(曲线中间凸起部分),同时在高阻层上随时间的增加快速衰减的特征;另外,早期时间观测到的响应中,小收发距下的响应值大于大收发距下的值,与文献[13]结果一致. 此例计算中,2种算法的精度没有明显差异,计算时间上,滤波法为0.03 s,连分式算法稍慢,但也没有超过0.07 s(计算设备与前述相同);滤波法的系数依赖于特定类型函数,且没有计算误差的评价,连分式算法则没有这个限制,这说明该算法可以替代线性滤波法的不足之处.

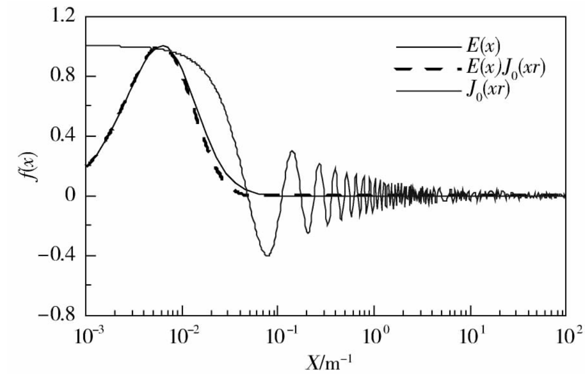

图5 核函数的形态($r = 50$ m). $E(X)$ 及 $E(X)J_0(Xr)$ 分别由其最大值归一化

Fig. 5 Behavior of kernel function ($r = 50$ m). $E(X)$ and $E(X)J_0(Xr)$ are normalized by their maximum values respectively

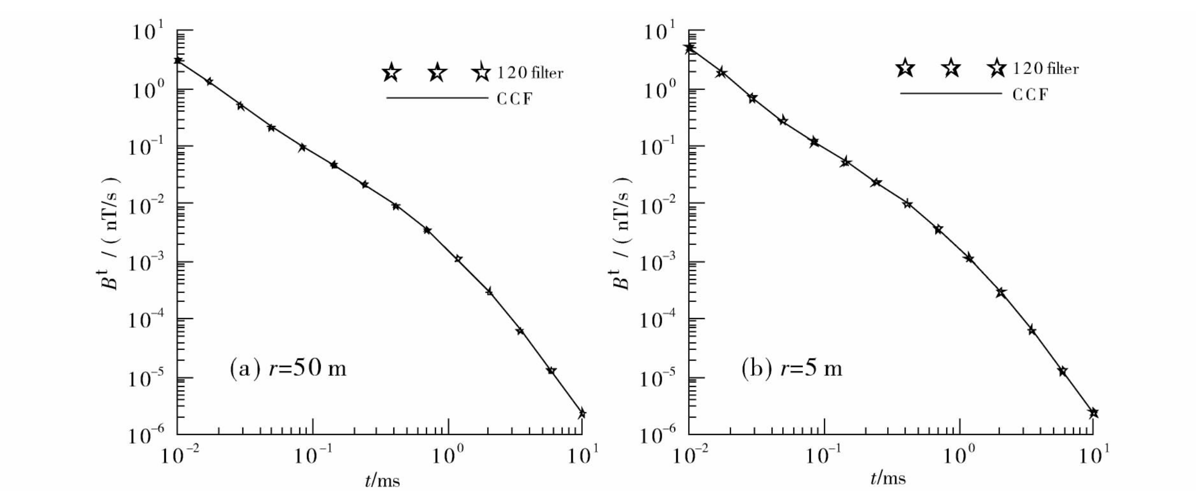

图6 连分式算法和滤波法计算的感应电动势响应曲线

Fig. 6 Response curves of EMF calculated using continued fraction method and 120 - points digital filter method

3 结论

1)在计算典型的余弦变换或 Hankel 积分 - Lipschitz 积分时,连分式算法具有精度高、稳定性好的特点.

2)连分式算法不仅能计算积分收敛或核函数快速衰减的余弦变换,也能计算积分发散型 Hankel 变换,适用范围优于数字滤波法.

3)在本文所涉及的一维瞬变电磁正演算例中(Hankel 积分),连分式算法与基于线性卷积的数字滤波法在计算精度上相当,计算速度上前者稍慢,但两者都能快速计算高震荡函数积分.

4)由于瞬变电磁法的场值动态范围很大,一般计算误差较大. 本文利用改进的 Chave - 连分式算法计算了典型层状大地模型的瞬变响应,结果表明连分式算法能够满足航空瞬变电磁的理论计算要

求，计算效果也与滤波法吻合.该算法可作为一种新的瞬变电磁响应计算方法.

参考文献：

[1] Misac N N. 勘查地球物理电磁法[M]. 赵经祥，译. 北京：地质出版社，1992.
Misac N N. Electromagnetic methods in applied geophysics[M]. translated by Zhao J X. Beijing: Geological Publishing House, 1992.

[2] 王华军. 正余弦变换的数值滤波算法[J]. 工程地球物理学报，2004，1(4):329-335.
Wang H J. Digital filter algorithm of the sine and cosine transform[J]. Chinese Journal of Engineering Geophysics, 2004, 1(4):329-335.

[3] Arieh I, Syvert P N. Efficient quadrature of highly - oscillatory integrals using derivatives[J]. Proceedings of the Royal Society of London Series A - Mathematical Physical and Engineering Sciences, 2005(461):1383-1399.

[4] Kaufman A A, Keller G V. 频率域和时间域电磁测深[M]. 王建谋，译. 北京：地质出版社，1987.
Kaufman A A, Keller G V. Frequency and transient soundings[M]. translated by Wang J M. Beijing: Geological Publishing House, 1987.

[5] Milovanovic G V. Numerical calculation of integrals involving oscillatory and singular kernels and some applications of quadratures[J]. Computers & Mathematics with Applications, 1998, 36(8):19-39.

[6] Guptasarma D. Computation of the time - domain response of a polarizable ground[J]. Geophysics, 1982, 47(11):1574-1576.

[7] Ghosh D P. The application of linear filter theory to the direct interpretation of geoelectrical resistivity sounding measurements[J]. Geophysical Prospecting, 1971(19):192-217.

[8] Chave A D. Numerical integration of related Hankel transforms by quadrature and continued fraction expansion[J]. Geophysics, 1989, 48(12):1671-1686.

[9] Anderson W L. A hybrid fast Hankel transform algorithm for electromagnetic modeling[J]. Geophysics, 1989, 54(2):263-266.

[10]《数学手册》编写组. 数学手册[M]. 北京：人民教育出版社，1979.
Writing group of handbook of mathematic. handbook of mathematics [M]. Beijing: People's Education Press, 1979.

[11] Hanggi P, Roesel F, Trautmann P. Evaluation of infinite series by use of continued fraction expansions: a numerical study[J]. Journal of Computational Physics, 1980(37):252-258.

[12] 蒋淑芬，向淑晃. 一种正余弦变换的高效算法[J]. 工程地球物理学报，2007，4(5):512-515.
Jiang S F, Xiang S H. An efficient method to calculate the sine and cosine transform[J]. Chinese Journal of Engineering Geophysics, 2007, 4(5):512-515.

[13] 李永兴，强建科，汤井田. 航空瞬变电磁法一维正反演研究[J]. 地球物理学报，2010，53(3):751-759.
Li Y X, Qiang J K, Tang J T. A research on 1 - D forward and inverse airborne transient electromagnetic method[J]. Chinese Journal of Geophysics, 2010, 53(3):751-759.

[14] 罗延钟，张胜业，王卫平. 时间域航空电磁法一维正演研究[J] 地球物理学报，2003，46(5):719-724.
Luo Y Z, Zhang S Y, Wang W P. A research on one - dimension forward for aerial electromagnetic method in time domain[J]. Chinese Journal of. Geophysics, 2003, 46(5):719-724.

[15] Guptasarma D, Singh B. New digital linear filters for Hankel J(0) and J(1) transforms[J]. Geophysical Prospecting, 1997(45):745-762.

Research on continued fraction algorithm for calculating 1 - D airborne transient electromagnetic

LONG Jian - bo, QIANG Jian - ke
(Key Laboratory of Metallogenic Prediction of Nonferrous Metals, Ministry of Education, School of Geosciences and Info - Physics, Central South University, Changsha 410083, China)

Abstract: In terms of low accuracy of fast Hankel transform algorithm, modified - continued fraction algorithm was used to simulate sine or cosine transform, and compared the results with the digital filter (DF) algorithm's, which shows that when dealing with fast convergent sine transforms or divergent transforms that DF method failed to calculate accurately here, the modified-continued fraction algorithm has always a high precision and quite stable results. Then some typical ATEM 1 - D modeling problems were calculated by this algorithm, and the results, which was compared with that by DF algorithm that was based on fast Hankel transform, were quite satisfactory in terms of its accuracy, speed and stability, the result show that this algorithm is a new efficiency method for calculation of transient electromagnetic modeling.

Key words: cosine transform; continued fraction; numerical calculation; transient electromagnetic field