

# 基于 matlab 的小波信号降噪技术

汤立文<sup>1</sup>, 唐东峰<sup>2</sup>

(1. 湖南兴业太阳能科技有限公司, 湖南湘潭 430021; 2. 湖南科技大学 信息与电气工程学院, 湖南湘潭 411201)

**摘要:** 论述了小波变换的一般理论和小波变换在信号降噪中的应用, 比较了不同小波基、阈值和分解层数下的小波降噪结果. 并在 matlab 平台上仿真实验, 利用信号噪声比 (SNR) 和均方根误差 (RMSE) 这 2 个评价指标评价小波降噪的效果. 实验结果表明, 小波变换在信号降噪中能取得较好的结果.

**关键词:** 小波变换; 降噪; 阈值; matlab

**中图分类号:** TP311.52      **文献标志码:** A      **文章编号:** 1672-9102(2014)01-0084-04

## Wavelet signal denoising technique based on matlab

TANG Li-wen<sup>1</sup>, TANG Dong-feng<sup>2</sup>

(1. Hunan Singyes Solar Technology Co. Ltd., Xiangtan 430021, China;

2. School of Information and Electrical Engineering, Hunan University of Science and Technology, Xiangtan 411201, China)

**Abstract:** The general theory of wavelet transform and the application of wavelet transform in signal de-noising were discussed. Different wavelet de-noising results with different wavelet bases, thresholds and decomposition level were compared. Matlab was used to carry out the simulation. Signal to noise ratio (SNR) and root mean square error (RMSE) were used to evaluate the effect of wavelet de-noising. Experimental results show that, the wavelet transform obtain better results in signal de-noising.

**Key words:** wavelet transform; de-noising; threshold; matlab

作为一种新颖的理论,小波分析被认为是数学史上的一个重要成果.小波分析是一种数学显微镜<sup>[1-2]</sup>,它克服了传统的傅立叶分析的不足,是一种很好的时频分析工具,特别适合于非平稳信号的分析,在信号处理方面有广阔的应用前景.在时间和频率上,小波变换都有很好的局部性,具有多分辨率的特点,可以对任何信号的细节聚焦并进行多分辨率的时频分析<sup>[3-4]</sup>.

在信号分析领域,信号降噪是重要研究课题之一<sup>[5-8]</sup>.如果信号中含有噪声,势必会对信号的传递、接收、分析和处理产生不利影响,因此需要在信号预处理时就对噪声加以消除和减少,从而最大程度地提取有用信号.目前,常见的降噪方法有传统的滤波方法和小波降噪方法,在实际应用中,针对不同的噪声和信号,可以采用不同的降噪方法.纯

时域法、纯频域法等传统的信号降噪方法在应用中都有其难以克服的局限性.在时域和频域,小波分析都具有很好的局部化特性,因此它在信号处理领域得到被广泛应用,并成为研究的热点<sup>[9-11]</sup>.

本文利用信号噪声比 (SNR) 和均方根误差 (RMSE) 作为评价指标,对采用不同小波基、阈值和分解层数下小波降噪的结果进行比较.旨在深入分析不同参数的特点,为小波信号降噪中合适选取小波基、阈值和分解层数提供一些参考,从而更有效地抑制噪声.

### 1 小波变换及其在信号降噪中应用

小波变换是傅立叶变换的发展,是一种数学分析方法,近年来才发展起来.由于傅立叶变换不能同时作时频分析,且对突变信号分辨率不高,为了

克服这些缺点,首先人们想到的是在傅立叶变换方程中加一个短窗,这就是短时傅立叶变换.但这个窗函数具有单一性,满足不了多分辨率的要求,其应用有一定局限性.必须找到了一个窗口大小可变的函数,才能满足多分辨率的要求,为此人们就引入了小波函数.

连续小波变换定义为

$$\text{WT}_x(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) x(t) dt. \quad (1)$$

在实际应用中,经常使用离散小波变换,并且要求信号能够重构.令  $a = a_0^m$  和  $b = na_0^m b_0$ , 那么离散小波变换为

$$\varphi_{m,n} = a_0^{-m/2} \varphi(a_0^{-m} t - nb_0). \quad (2)$$

取  $a_0 > 1, b_0 \neq 0$ . 这时,离散小波变换式为

$$\text{WT}_x(m, n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{m,n}(t) x(t) dt. \quad (3)$$

取  $a_0 = 2, b_0 = 1$ , 式(2)可写成一个函数系

$$\varphi_{j,k}(t) = \{2^{-j/2} \varphi(2^{-j} t - k)\} \quad j, k \in \mathbb{Z}. \quad (4)$$

在信号分析中,小波得到广泛应用.它可以用于边界的处理与滤波、时频分析、信噪分离与提取弱信号、求分形指数、信号的识别与诊断以及多尺度边缘检测等.目前,基于小波变换的信号降噪方法成为信号降噪的主要方法之一,并已经得到了很好的应用效果.

一维含噪信号的模型可表示为

$$s(t) = f(t) + n(t). \quad (5)$$

式中,  $s(t)$  为含有噪声的信号,  $f(t)$  为原始信号,  $n(t)$  为噪声,假定  $n(t)$  是服从  $N(0, \sigma^2)$  的高斯白噪声.降噪的目的就是尽可能使实际信号与噪声信号分离,从而使真实的信号得以保留,噪声被去除.

小波阈值降噪法被认为是应用较为广泛的一种小波降噪方法.其基本思想是,信号经过小波分解后,其中幅值较大的系数包含信号的重要信息,而那些一致分布且数目和幅值均较小的系数对应的是噪声.基于此,Donoho 等人提出小波变换阈值收缩降噪法,即将小波分解后所得的绝对值较小系数置为零,而保留或收缩(shrinkage)绝对值较大的系数,得到小波系数估计值,然后利用小波系数估计值直接进行信号重构,进而实现降噪.

小波分析用于降噪的过程主要步骤如下:

1) 小波分解:在一定基小波和分解层数下,对含有噪声的信号进行小波(小波包)分解,得到相应的小波分解系数.

2) 阈值处理:对分解得到的小波系数作用阈值,作用阈值的方法有2种:

硬阈值(hard thresholding):将绝对值小于给定阈值的小波系数置为0,而绝对值大于阈值的小波系数保持不变,即

$$w_\lambda = \begin{cases} w, & |w| \geq \lambda; \\ 0, & |w| < \lambda. \end{cases} \quad (6)$$

软阈值(soft thresholding):将绝对值小于给定阈值的小波系数置为0,而将绝对值大于阈值的小波系数,都减去阈值,即

$$w_\lambda = \begin{cases} \text{sign}(w) (|w| - \lambda), & |w| \geq \lambda; \\ 0, & |w| < \lambda. \end{cases} \quad (7)$$

$w$  为小波系数,  $w_\lambda$  为作用阈值后的小波系数,  $\lambda$  是阈值.

3) 重构:对经阈值处理过的小波系数进行小波(小波包)重构,得到降噪后的信号.

小波阈值在降噪过程中起到了决定性的作用,因此小波降噪中阈值的选择是最关键的.如果选择的阈值太小,将会有过多的噪声分量包含于阈值处理后的小波系数中,达不到降噪的效果;如果选择的阈值太大,有用的成分可能被去除,而引起失真.阈值的选取规则有如下几种:

1) Stein 无偏似然估计阈值(rigsure):对于给定一个阈值  $\lambda$ ,利用 Stein 无偏/似然估计原理,得出其似然估计,再将非似然  $\lambda$  最小化,即可得到所选的阈值.

2) 长度对数阈值(sqrtwolong):该阈值是将具有最小极大方差的阈值  $\lambda$  乘以一个系数  $\sqrt{\log(\text{length}(s))}$ ;

3) 启发式 sure 阈值(heursure):由于在高信噪比情况下 sure 产生的阈值降噪效果不佳,所以通过启发函数,在前2种阈值中自动选取一种;

4) 极大极小阈值(minimaxi):在最坏情况下,求出未知回归函数与原信号方差的最小值,从而得到阈值.

小波分解层数也是影响小波降噪效果的因素之一.从理论上讲最大分解层数  $J = \log_2 N$  ( $N$  取整数).分解层数越大,噪声特性和信号特性的差异将越来越明显,从而对信号和噪声分离更有利;就重构而言,分解层数越大,将造成重构中出现的误差增大,从而使失真也越大;当分解尺度数太小时,噪声所对应的模极大值不能被足够衰减,信号与噪声将难以区别,但如果分解尺度数过大,信号中一些重要的局部特性将会丢失.

在信号的降噪研究中,小波基的选择是一个重要的问题,不同的小波基对于信号的降噪结果可能有很大差别.在进行降噪时,小波基的选择标准通常考虑以下几个方面:1) 自相似原则,当小波基与信号相似时,小波变换后的能量将比较聚集;2) 紧

支性,为了便于信号的局部分析,小波函数在时域上必须具有紧支撑,当小波的支集越短时,其信号局部化分析能力越强,这将更有利于信号突变点的确定;3)对称性,对于具有对称性的小波,其分解时的滤波器组具有线性相位,从而可以避免信号分解重构时的相位失真;4)正则性,它可以用来描述函数的光滑程度,也能度量函数频域能量的集中程度.

## 2 仿真结果及分析

实验中采用信噪比 SNR 和均方根误差 RMSE 2 个指标来评估降噪性能. 信噪比定义为

$$\text{SNR} = 10 \lg \left( \frac{\sum_{n=1}^N s^2(n)}{\sum_{n=1}^N [f_d(n) - s(n)]^2} \right). \quad (8)$$

式中,  $n$  表示采样点数,  $s(n)$  表示原始信号,  $f_d(n)$  表示降噪后的信号. 均方根误差定义为

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (f_d(n) - s(n))^2}. \quad (9)$$

仿真以非平稳信号 bumps 为研究对象. 添加白噪声后 SNR 为 13.468 6, RMSE 为 0.992 0, 如图 1 所示. 采用小波基 db5, 对含噪 bumps 信号做 3 层小波分解, 得到尺度为 3 的近似系数和 3 个尺度的细节系数, 如图 2 所示. 小波分解后的小波系数分成 2 个部分, 即细节系数(高频部分)和近似系数(低频部分), 其中细节系数对应细节值或噪声, 而近似系数对应趋势值或实际信号. 小波分解后, 需要选取合适的阈值, 对小波系数进行阈值处理, 随后将阈值处理过的细节系数和近似系数重构, 从而得到滤波后信号.

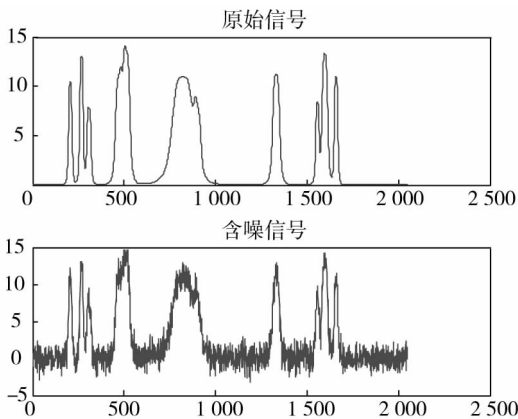


图1 原始信号和含噪信号

使用 db5 小波, 阈值规则采用 rigsure, 小波分解层数为 5, 分别作用软阈值法和硬阈值进行降噪, 降噪结果如图 3 所示. 作用硬阈值降噪后 SNR 和 RMSE 分别为 20.564 6 和 0.438 2, 作用软阈值

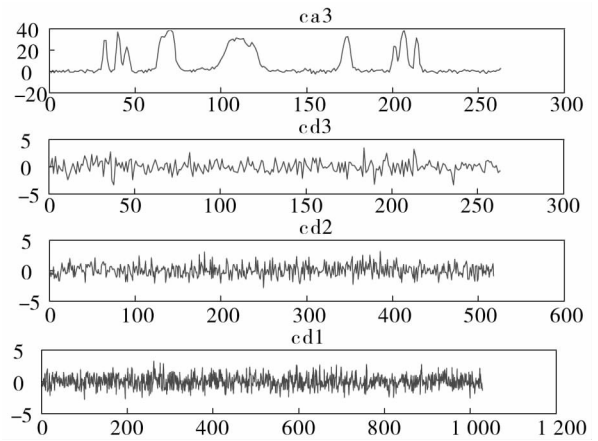


图2 含噪 bumps 信号在 db5 小波下 3 层分解的近似系数和细节系数

法降噪后 SNR 和 RMSE 分别为 22.931 8 和 0.333 7. 可以看出, 2 种作用阈值方法的降噪效果都很明显, 但软阈值降噪后信噪比更大, 均方根误差更小. 由于硬阈值处理函数的不连续性, 降噪后的信号不具有和原始信号一样的光滑性, 但硬阈值降噪可以保留信号特征. 使用软阈值降噪, 虽然降噪后的信号变得平滑, 但信号某些特征也会丢失.

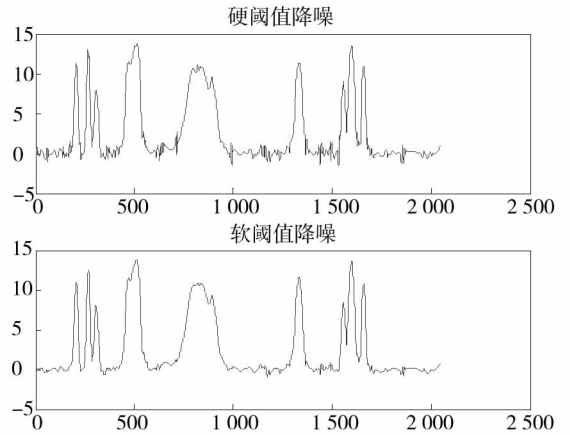


图3 使用软阈值和硬阈值降噪结果

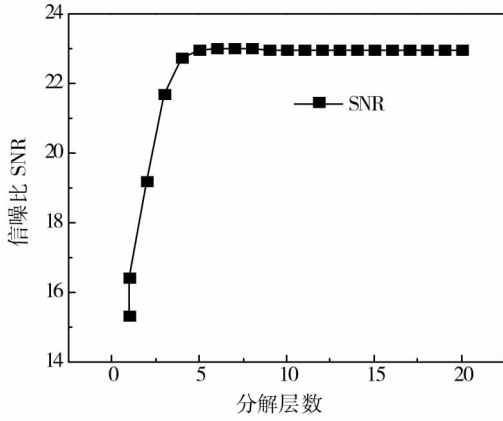
选择 db5 小波, 分解层数取 5, 分别选用 rigsure, heursure, sqtwolog 和 minimaxi 4 种不同阈值规则, 作用软阈值, 降噪结果见表 1. 可以看出, 采用 heursure 阈值规则对含噪 bumps 信号进行降噪的效果最优.

表1 4种阈值规则降噪结果

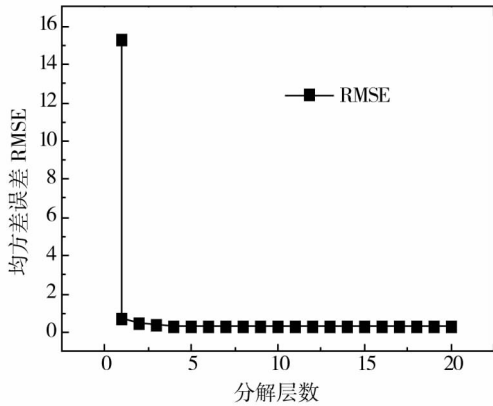
规则	SNR	RMSE
rigsure	22.931 8	0.333 7
heursure	22.981 7	0.331 8
sqtwolog	18.122 5	0.580 5
minimaxi	20.242 2	0.454 8

使用 db5 小波, 阈值规则采用 heursure, 作用软

阈值,小波分解层数依次从 1 到 12 层,对含噪 bumps 信号进行降噪,结果见图 4. 降噪效果起初随着分解层数的增加而变好,但是当分解层数到达一定值时,降噪效果会略微降低,并趋于一个稳定水平. 仿真结果显示分解层数为 6 时,降噪效果最好.



(a)分解层数与SNR关系



(b)分解层数与RMSE关系

图 4 不同分解层数降噪结果

固定分解层数为 6, 阈值规则采用 heursure, 作用软阈值, 分别选用 6 种不同系列的 11 种小波进行降噪, 降噪结果如表 2 所示. 不同小波降噪效果有些差异, haar 小波降噪效果最差, coif5 小波降噪效果最好.

表 2 不同小波基降噪结果

小波	SNR	RMSE
haar	19.985 7	0.469 9
db5	23.035 5	0.329 7
db8	23.159 5	0.325 1
sym4	23.020 3	0.330 3
sym8	23.061 6	0.328 7
coif2	23.229 6	0.322 4
coif5	23.285 0	0.320 4
bior3.9	20.325 3	0.450 5
bior6.8	23.038 2	0.329 6
rbio1.3	22.229 6	0.361 9
rbio2.6	23.150 1	0.325 4

### 3 结论

本文通过对小波理论及其在信号降噪的应用进行分析,以非平稳 bumps 信号为例,就小波基、小波分解层数和阈值规则的选择进行了深入讨论,并通过 matlab 仿真实验进行验证. 实验结果表明:软阈值法和硬阈值法各有优缺点,相对硬阈值降噪,软阈值降噪后信号更光滑,SNR 和 RMSE 都比较好,但会丢失掉部分信号特征;阈值规则、分解层数和小波基的选择都对小波降噪效果有影响,对于具体信号而言,要综合考虑这些因素的影响,找到最优的小波降噪方案.

### 参考文献:

[1] Chen G, Zhu W P. Signal denoising using neighbouring dual - tree complex wavelet coefficients [J]. IET Signal Processing, 2012, 6(2): 143 - 147.

[2] Pan Y H, Fan R. A wavelet neural networks license recognition algorithm and its application [J]. Journal of Computers, 2012, 7(7): 1583 - 1590.

[3] Wei G F, Su F, Jian T. Study on the robust wavelet threshold technique for heavy - tailed noises [J]. Journal of Computers, 2011, 6(6): 1246 - 1253.

[4] Lan Y H, Ren H Z, Zhang Y, et al. Multi - band vector wavelet transformation based multi - focus image fusion algorithm [J]. Journal of Software, 2013, 8(1): 208 - 217.

[5] 刘杨, 金天. 小波降噪在微弱 GPS 信号捕获中的应用 [J]. 系统工程与电子技术, 2011, 33(4): 842 - 846.

[6] 王博, 缪玲娟, 汪顺亭, 等. 改进的小波降噪方法在 GPS 姿态测量中的应用 [J]. 宇航学报, 2008, 29(4): 1267 - 1271.

[7] 许仕荣, 汤广发, 孙泉. 基于小波分析的城市供水 SCADA 系统的信号消噪 [J]. 湖南科技大学学报(自然科学版), 2009, 22(1): 59 - 62.

[8] 薛茹, 毛灵涛, 安里千. 小波分析在动态实验数据处理中的应用 [J]. 湖南科技大学学报(自然科学版), 2007, 24(2): 57 - 60.

[9] 邓懿波, 谭志洪, 黄媛. 小波降噪影响因素的研究 [J]. 华东交通大学学报, 2005, 22(2): 161 - 164.

[10] 郝文广, 丁常富, 梁娜. 小波降噪与 FFT 降噪比较 [J]. 电力科学与工程, 2011, 27(3): 59 - 61.

[11] 刘婷, 刘红秀. 基于小波阈值变换的心电图去噪研究 [J]. 广东医药学院学报, 2008, 24(6): 602 - 604.