

二型 TSK 模糊系统研究现状

郑高

(公安海警学院 机电管理系, 浙江 宁波 315801)

摘要:作为二型模糊系统的一个重要分支,二型 TSK 模糊系统在工程上的应用非常广泛,而国内在这一方面的研究还比较少.为此,综述了二型 TSK 模糊系统的研究现状.重点分析了一阶区间二型 TSK 模糊系统的3种结构及其推理过程,归纳了二型 TSK 模糊系统的适用范围,列举了近年来的一些成功应用案例,并通过一个短期电力负荷的预测实例验证了其在处理不确定方面的优越性.最后,总结了现阶段存在的不足,并指出了未来的发展方向,以期为以后的研究提供参考.

关键词:二型模糊逻辑;二型模糊集合;二型模糊系统;二型 TSK 模糊系统;区间二型 TSK 模糊系统

中图分类号:N94 **文献标志码:**A **文章编号:**1672-9102(2014)02-0070-06

Research status of type - 2 TSK FLS

ZHENG Gao

(Department of Electromechanical Management, China Maritime Police Academy, Ningbo 315801, China)

Abstract: As an important branch of type - 2 fuzzy logic system (FLS), a type - 2 Takagi - Sugeno - Kang (TSK) FLS has a very wide range of applications in engineering, and the domestic research in this sphere is still less. Therefore, the research status of type - 2 TSK FLS was summarized. Three architectures of the first order interval type - 2 TSK FLS and their inference procedures were mainly analyzed. Applicable ranges of type - 2 TSK FLSs were concluded, some successful application cases in recent years were listed, and a simulation case of short - term power load forecast was presented to verify the superiority of type - 2 TSK FLSs in dealing with uncertainties. Finally, the deficiency at present was summarized and the future development was pointed out in order to provide reference for the later research.

Key words: type - 2 fuzzy logic; type - 2 fuzzy set; type - 2 FLS; type - 2 TSK FLS; interval type - 2 TSK FLS

模糊逻辑提供了利用语言形式的专家经验进行推理的新思路,能模拟人类的推理方式来处理难以用精确数学模型表达的不确定性,一经问世便引起了广泛的注意.经过近50年的发展,模糊逻辑已经在控制、通信、图像处理、医疗、金融等诸多领域获得了成功的应用^[1].

传统(一型)模糊逻辑的主要缺陷在于不能有效地描述与处理模糊规则的不确定性,对于一些具有强不确定性的复杂系统,人们的认识和经验通常

比较模糊或贫乏,导致概括不出合理的规则来构建有效的系统^[2].为弥补此不足,美国控制论专家 Zadeh 提出了二型模糊集合的概念^[3],并以此为基础建立了二型模糊逻辑.在一段时间内,由于运算复杂、难以理解,二型模糊逻辑并未引起太多关注.自上世纪90年代以来,其逐步引起了人们的重视,成为人工智能领域的一个研究热点.国际上众多学者对二型模糊集合理论(包括集合的性质、特点及其并、交、补运算等)、二型模糊系统理论(包括系

收稿日期:2013-12-01

基金项目:四川省重大技术装备创新研制项目计划基金项目(川财建[2013]153号);宁波市自然科学基金项目(2013A610142);公安海警学院科研发展基金项目(2013XYPY2009)

通信作者:郑高(1977-),男,陕西咸阳人,博士,讲师,主要从事人工智能、楼宇自动化、船舶自动化等方面的研究. E-mail: zg197762@163.com

统各组成部分的功能、特点及其推理过程等)等做了深入的研究, Mendel 等人最终建立起了比较完整的二型模糊逻辑理论^[4], 而国内在这一方面的研究还比较少。

本文主要研究二型模糊系统的一个重要分支—二型 TSK 模糊系统, 其应用非常广泛. 第一节简单回顾二型模糊逻辑的基本知识. 第二节重点研究二型 TSK 模糊系统理论, 主要内容包括一阶二型 TSK 模糊系统与一阶区间二型 TSK 模糊系统. 第三节归纳二型 TSK 模糊系统的应用范围以及近年来的成功应用案例, 并通过一个短期电力负荷的预测实例来验证其在处理不确定方面的优越性. 最后在第四节给出结论和展望.

1 二型模糊逻辑

1.1 二型模糊集合

一个定义在论域 X 上的二型模糊集合 \bar{A} 可以表示为式(1)^[5].

$$\bar{A} = \int_{x \in X} \left[\int_{u \in J_x} \mu_{\bar{A}}(x) \right] / x = \int_{x \in X} \left[\int_{u \in J_x} f_x(u) / u \right] / x. \quad (1)$$

式中, $f_x(u) \subseteq [0, 1]$ 称为次隶属度值; $u \in J_x \subseteq [0, 1]$ 称为主隶属度值, J_x 是主隶属度值的范围; J_x 的并集称为不确定性的迹(FOU); FOU 的上、下限对应集合的上、下隶属度函数; J 是并集号, 对于离散论域, J 用和式号 Σ 来代替.

图 1 所示是一个离散二型模糊集合, 论域 $X = \{1, 2, 3\}$, 当 $x = 1$ 时, $J_1 = \{0, 0.2\}$, $f_1(0) = 0.8$, $f_1(0.2) = 0.4$; 当 $x = 2$ 时, $J_2 = \{0.4, 0.6\}$, $f_2(0.4) = 0.2$, $f_2(0.6) = 0.2$; 当 $x = 3$ 时, $J_3 = \{0.2, 0.4\}$, $f_3(0.2) = 0.4$, $f_3(0.4) = 0.2$. 集合可用式(2)表示.

$$\bar{A} = \left(\frac{0.8}{0} + \frac{0.4}{0.2} \right) / 1 + \left(\frac{0.2}{0.4} + \frac{0.2}{0.6} \right) / 2 + \left(\frac{0.4}{0.2} + \frac{0.2}{0.4} \right) / 3. \quad (2)$$

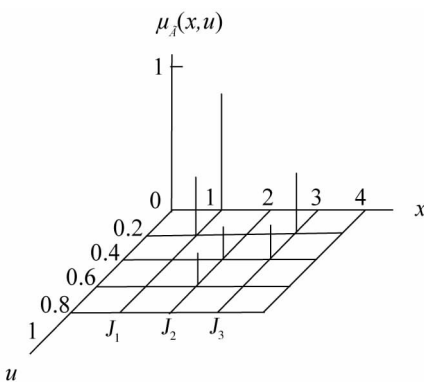


图 1 一个离散二型模糊集合

可见, 二型模糊集合元素的隶属度值是一个一型模糊集合, 其结构比一型模糊集合要复杂得多, 因而并、交、补等运算也更复杂. 最简单、最实用的

是区间二型模糊集合, 如式(3)所示. 应用区间二型模糊集合, 不用选取次隶属度函数, 而且并、交、补等计算都大大简化^[6].

$$\bar{A} = \int_{x \in X} \left[\int_{u \in J_x} 1 / u \right] / x. \quad (3)$$

1.2 二型模糊系统

Mamdani 系统与 TSK 系统是工程领域最常用的 2 种模糊系统.

二型 Mamdani 模糊系统是相应一型 Mamdani 模糊系统的扩展, 包括模糊器、推理机、规则库、降型器(type-reducer)及解模糊器 5 部分^[7]. 模糊器把输入精确值映射为单值、一型或二型模糊集合. 推理机通过“扩展 sup-star 合成”把输入映射到输出^[8]. 规则库中规则的前、后件是二型模糊集合. 降型器把推理机输出的二型模糊集合转换为一型模糊集合^[9]. 最后通过解模糊器将降型集合精确化.

二型 TSK 模糊系统由相应一型 TSK 模糊系统扩展而来, 其规则前件是模糊集合, 后件是一个函数, 后件函数有一阶与高阶之分, 相应的系统称为一阶二型 TSK 模糊系统与高阶二型 TSK 模糊系统^[10].

2 二型 TSK 模糊系统的研究现状

在所有的二型 TSK 模糊系统中, 一阶二型 TSK 模糊系统最常用, 而一阶二型 TSK 模糊系统由相应的一阶一型 TSK 模糊系统扩展而来.

2.1 一阶一型 TSK 模糊系统

最早研究 TSK 模糊系统的学者是 Takagi 与 Sugeno^[11]. 对于一个含有 p 维输入、一维输出、 M 条规则的一阶一型 TSK 模糊系统, 其规则如式(4)所示.

$$R^l: \text{IF } x_1 \text{ is } F_1^l \text{ and } \dots \text{ and } x_k \text{ is } F_k^l \text{ and } \dots \text{ and } x_p \text{ is } F_p^l, \text{ THEN } y^l(X) = c_0^l + \dots + c_j^l x_j + \dots + c_p^l x_p. \quad (4)$$

式中, l 是规则序数, $l = 1, \dots, M$; k 是前件序数, $k = 1, \dots, p$; F_k^l 是前件一型模糊集合; $y^l(X)$ 是后件函数; $c_j^l (j = 0, \dots, p)$ 是后件精确值参数.

2.2 一阶二型 TSK 模糊系统

将式(4)所示的规则前件一型模糊集合 F_k^l 扩展为二型模糊集合 \bar{F}_k^l , 后件精确值参数 c_j^l 扩展为一型模糊数 C_j^l , 就得到了一阶二型 TSK 模糊系统规则, 如式(5)所示^[4]. 根据 Zadeh 的“扩展原理”, 系统的输出用式(6)来计算^[4].

$$R^l: \text{IF } x_1 \text{ is } \bar{F}_1^l \text{ and } \dots \text{ and } x_k \text{ is } \bar{F}_k^l \text{ and } \dots \text{ and } x_p \text{ is } \bar{F}_p^l, \text{ THEN } Y^l(X) = C_0^l + \dots + C_j^l x_j + \dots + C_p^l x_p. \quad (5)$$

$$Y_{\text{TSK}, 2}(X) = \int_{y^1 \in Y^1} \dots \int_{y^M \in Y^M} \int_{f^1 \in F^1} \dots \int_{f^M \in F^M} \frac{T_{l=1}^M \mu_{Y^l}(y^l) * T_{l=1}^M \mu_{F^l}(f^l)}{\sum_{l=1}^M f^l}. \quad (6)$$

式中, Y^l 是第 l 条规则的输出, 隶属度函数为 $\mu_{y^l}(y^l)$; F^l 是第 l 规则的激活集合, 隶属度函数为 $\mu_{F^l}(f^l) = \prod_{k=1}^p \mu_{F_k^l}(x_k)$, \prod 为 meet 算子; T 与 $*$ 是 t -范数, 一般取乘积或最小。

普通二型 TSK 模糊系统计算复杂、实现困难, 应用区间二型 TSK 模糊系统可以大大减少计算量。

2.3 一阶区间二型 TSK 模糊系统

根据规则前、后件的不同形式, 一阶区间二型 TSK 模糊系统可以分为 A2-C1、A2-C0 以及 A1-C1 3 种类型(A 代表规则前件, C 代表规则后件)^[4]。

1) A2-C1 型

A2-C1 型系统即普通的一阶区间二型 TSK 模糊系统, 规则形式如(5)所示, 其前件集合、后件参数分别如式(7)、式(8)所示。规则的激活集合是区间集合, 如式(9)所示。激活规则的输出是区间集合, 如式(10)所示。系统的最终输出也是一个区间集合, 用式(11)计算。

$$\mu_{F_k^l}(x_k) = [\underline{\mu}_{F_k^l}(x_k), \bar{\mu}_{F_k^l}(x_k)]. \quad (7)$$

式中, $\underline{\mu}_{F_k^l}(x_k)$, $\bar{\mu}_{F_k^l}(x_k)$ 分别是规则前件集合的下、上隶属度函数。

$$C_k^l = [c_j^l - s_j^l, c_j^l + s_j^l]. \quad (8)$$

式中, c_j^l, s_j^l 分别是规则后件集合的中心与分布。

$$F^l(X) = [f^l(X), \bar{f}^l(X)]. \quad (9)$$

式中, $f^l(X) = \mu_{F_1^l}(x_1) * \dots * \mu_{F_p^l}(x_p)$, 由激活集合的下隶属度函数取 t -范数得到; $\bar{f}^l(X) = \mu_{F_1^l}(x_1) * \dots * \mu_{F_p^l}(x_p)$, 由激活集合的上隶属度函数取 t -范数得到; $*$ 表示 t -范数。

$$Y^l = [\underline{y}^l, \bar{y}^l]. \quad (10)$$

式中, $\underline{y}^l, \bar{y}^l$ 是 Y^l 的下、上限, $\underline{y}^l = \sum_{k=1}^p c_k^l x_k + c_0^l -$

$$\sum_{k=1}^p |x_k| s_k^l - s_0^l \bar{y}^l = \sum_{k=1}^p c_k^l x_k + c_0^l + \sum_{k=1}^p |x_k| s_k^l - s_0^l.$$

$$Y_{\text{TSK},2}(X) = [\underline{y}, \bar{y}] =$$

$$\int_{y^1 \in [\underline{y}^1, \bar{y}^1]} \dots \int_{y^M \in [\underline{y}^M, \bar{y}^M]} \int_{f^1 \in [f^1, \bar{f}^1]} \dots \int_{f^M \in [f^M, \bar{f}^M]} \frac{1}{\sum_{l=1}^M f^l y^l} \quad (11)$$

在实际应用中通常采用 KM (Karnik - Mendel) 迭代算法来简化式(11)的计算^[12], KM 算法经过若干个迭代过程而单调收敛。Wu 与 Mendel 提出了一种 EKM (Enhanced Karnik - Mendel) 快速迭代算法, 能节省大约 2 个迭代过程, 使运算时间减少大约 39%^[13]。然而, EKM 算法中求取切换点的初始化方法还不完善, 故其应用受到了限制。对此, 王建辉等人提出了一种改进的 EKM 算法, 更改了 EKM 算法切换点的初始化条件, 改进了查找切换点的方

法, 可以实现向上和向下搜索, 使运算量进一步减小^[14]。Celemin 与 Melgarejo 也提出了一种新的快速迭代算法, 通过预计算来提高运算速度, 基于不确定性的界来进行初始化, 经算例验证其运算速度比带有停止条件的 EKM 快速迭代算法快^[15]。

2) A2-C0 型

A2-C0 型系统是 A2-C1 型系统的一种特殊形式, 其规则前件集合是区间二型模糊集合, 后件参数是精确值, 即 $\underline{y}^l = \bar{y}^l = y^l$, 如(12)所示, 系统输出表示为式(13), 若用 KM 算法计算更加快捷。

$$R^l: \text{IF } x_1 \text{ is } \bar{F}_1^l \text{ and } \dots \text{ and } x_k \text{ is } \bar{F}_k^l \text{ and } \dots \text{ and } x_p \text{ is } \bar{F}_p^l, \\ \text{THEN } Y^l(X) = c_0^l + \dots + c_j^l x_j + \dots + c_p^l x_p. \quad (12)$$

$$Y_{\text{TSK},2}(X) = [\underline{y}, \bar{y}] = \int_{f^1 \in [f^1, \bar{f}^1]} \dots \int_{f^M \in [f^M, \bar{f}^M]} \frac{1}{\sum_{l=1}^M f^l y^l} \quad (13)$$

式中, 激活集合 $[f^l, \bar{f}^l]$ 用式(9)计算。

3) A1-C1 型

A1-C1 型系统是 A2-C1 型系统的另一种特殊形式, 其规则前件集合是一型模糊集合, 后件参数是区间集合, 如式(14)所示。系统输出用式(15)来计算, 也可以进一步表示为式(16), 用 KM 算法计算更加快捷。

$$R^l: \text{IF } x_1 \text{ is } F_1^l \text{ and } \dots \text{ and } x_k \text{ is } F_k^l \text{ and } \dots \text{ and } x_p \text{ is } F_p^l, \\ \text{THEN } Y^l(X) = C_0^l + \dots + C_j^l x_j + \dots + C_p^l x_p. \quad (14)$$

$$Y_{\text{TSK},2}(X) = [\underline{y}, \bar{y}] = \int_{y^1 \in [\underline{y}^1, \bar{y}^1]} \dots \int_{y^M \in [\underline{y}^M, \bar{y}^M]} \frac{1}{\sum_{l=1}^M f^l y^l} \quad (15)$$

$$Y = [\underline{y}, \bar{y}] = \left[\frac{\sum_{l=1}^M f^l \underline{y}^l}{\sum_{l=1}^M f^l}, \frac{\sum_{l=1}^M f^l \bar{y}^l}{\sum_{l=1}^M f^l} \right]. \quad (16)$$

式中, 激活度 $f^l(X)$ 是精确值, $f^l(X) = T_{k=1}^p \mu_{F_k^l}(x_k)$; $[\underline{y}^l, \bar{y}^l]$ 用式(10)来计算。

式(15)表明, A1-C1 型模糊系统与规则后件参数是 A1-C1 型模糊系统规则后件中心的一型 TSK 模糊系统等价。

综上所述, 一阶区间二型 TSK 模糊系统的输出是一个区间集合, 解模糊只需取区间中心即可, 如式(17)所示, 非常方便。

$$y_{\text{TSK},2}(X) = \frac{\underline{y} + \bar{y}}{2}. \quad (17)$$

前面所讨论的模糊系统都进行了标准化处理(输出都除了一个权重因子 $\sum_{l=1}^M f^l$), 叫标准化系统。在某些情况下不需要将系统标准化, 其参数的定义与标准化系统中的一致。非标准化的 TSK 系统要比标准化的简单, 其性能如何视具体情况而定。

3 二型 TSK 模糊系统的应用

3.1 二型 TSK 模糊系统的应用范围

二型 TSK 模糊系统适于处理具有强不确定性的对象,对象蕴含的不确定性越强,应用二型 TSK 模糊系统的优势就越明显,有学者指出其适用于下述的几种情况^[4]:

- 1) 对象由具有随机性的统计特征来描述,而随机性事先不能用数学语言表达。
- 2) 系统由含有噪声的数据产生,而噪声的时变特征事先不能用数学语言描述。
- 3) 知识来自于对专家的问卷调查,得到的专家经验中含有论域不确定的语元。

3.2 二型 TSK 模糊系统的应用案例

二型 TSK 模糊系统具有万能逼近性能与较好的鲁棒性与可靠性,因而获得了为复杂输入-输出关系建模的能力^[10],近年来在控制、预测、通信等许多领域获得了成功的应用。

稳定性是衡量系统性能的一个重要指标。对于区间二型 A2-C0 TSK 模糊系统,输出如式(13)所示,用 KM 快速迭代算法的缺陷是输出公式不是闭式的,无法分析系统的稳定性。为克服这个缺陷,文献[16]提出了3种用闭式推理机来取代降型器的系统设计方法,可以用 Lyapunov 方法来分析系统的稳定性,式(18)所示是其中的一种。将该系统用做倒车控制器,在不同的初始位置都能快速、准确的将车停于指定位置上,性能优于相应的一型 TSK 系统,而且结构简单、适于实时应用。文献[17]也提出了类似的稳定系统,将其用作倒立摆控制器,效果比一型 TSK 系统好很多,具有较强的鲁棒性。文献[18]设计了一个基于区间二型 TSK 模糊模型的机器人导航系统,在未知、动态环境中,得到的轨迹比一型 TSK 模糊系统的快速、平滑。文献[19]提出了一种基于二型 TSK 模糊系统的非线性系统脉冲控制方法,弥补了相应一型模糊系统在描述与处理不确定性方面的不足,并通过一个倒立摆模型的控制仿真实例验证了其有效性与性能的优越性。文献[20]采用并行分布式补偿法来设计区间二型 TSK 模糊控制系统,利用 Lyapunov 方法,以线性矩阵不等式的形式给出了系统稳定工作的约束条件,通过颠簸路面上自主平行泊车控制与连续搅拌槽反应过程控制2个应用实例,验证了系统在掌控多重不确定性信息方面的优势。

$$Y_{\text{TSK},2}(X) = \frac{\alpha \sum_{l=1}^M f_l^y y^l}{\sum_{l=1}^M \bar{f}_l^y} + \frac{(1-\alpha) \sum_{l=1}^M f_l^y y^l}{\sum_{l=1}^M \bar{f}_l^y} \quad (18)$$

式中, α 是贡献参数,表示各规则上、下隶属度函数在产生系统输出过程中的贡献程度,其大小根据不

确定性的水平来调节。

Méndez 与 Castillo 在文献[21]中提出了一种基于混合学习算法的区间二型 TSK 模糊系统,利用 BP 算法来确定规则前件的参数,通过回归最小二乘/平方根滤波器(RLP/REFIL)算法来估计规则后件的参数。将该系统用于轧钢工业中钢带温度的逼近与断路器条状面温度传导的预测,效果优于单纯使用 BP 算法的区间二型 TSK 模糊系统。

在通信领域,文献[22]提出了一种二型 TSK 模糊滤波器,用于非线性时变信道的反馈均衡,效果比最近邻聚类算法以及相应一型 TSK 模糊系统的好,而且具有快速、结构简单的优点。

Ren 等人对高阶二型 TSK 模糊系统进行了深入的研究,将一种基于减法聚类的一阶二型 TSK 模糊系统设计方法^[23]扩展到高阶二型 TSK 模糊系统的设计中^[12],但其应用还有待于进一步的探索。

有关二型 TSK 模糊系统的成功应用案例还有很多,这里就不再详述。

3.3 实例与验证

设计一型 TSK 模糊系统,常用方法有留一(OP)法、最小二乘(LS)法、反向传播(BP)算法等^[4]。留一法中的每条规则只能由一个输入-输出数据对产生。LS 算法先确定规则前件集合的结构和参数,再用最小二乘法调节后件集合的参数。BP 算法通过训练输入-输出数据对来确定规则前、后件集合的参数,在训练之前所有的系统参数都待定,然后用最陡峭下降算法来调节这些参数。BP 算法使系统具有了获取语言知识的能力与参数自适应能力,性能比前2种方法好。OP 与 BP 算法是设计二型 TSK 模糊系统的常用方法^[4]。在所有的一阶一型模糊系统和一阶区间二型模糊系统中,一阶区间二型 A2-C1 TSK 模糊系统的设计参数最多,所以具有最大的可调自由度。

下面建立一个基于 BP 算法的一阶区间二型 A2-C1 TSK 模糊系统用于电力负荷的时间序列预测,同时构建一个基于 BP 算法的一阶一型 TSK 模糊系统作为检验性能的基准。2个系统都有4个输入、1个输出,各用了16条规则。二型模糊系统每个规则前件的输入空间包含2个区间二型模糊集合,其主隶属函数是图2所示的均值不确定的高斯隶属函数,如式(19)所示。一型模糊系统每个规则前件的输入空间包含2个高斯模糊集合。采用先固定前、后件的形状,再用 BP 算法训练参数的设计过程。选取我国某市电力公司的实际电力负荷数据作为预测时间序列,以每5min的负荷值为一点。实验数据共1000个,前754个用来训练参数,后246个用来检验结果。系统性能用式(20)所示的均方根误差来评价。

$$\mu_k^l(x_k) = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_k - m_k^l}{\sigma_k^l}\right)^2\right] \quad m_k^l \in [\underline{m}_k^l, \bar{m}_k^l] \quad (19)$$

式中, $[\underline{m}_k^l, \bar{m}_k^l]$ 是前件集合主隶属度函数的均值范围。

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{246} \sum_{k=754}^{999} [s(k+1) - f(X^{(k)})]^2} \quad (20)$$

式中, $f(X^{(k)})$ 是预测数据; $X^{(k)} = (x(k-3), x(k-2), x(k-1), x(k))$ 是系统输入; $s(k+1)$ 是实际数据。

2个系统的预测结果分别如图3、图4所示。

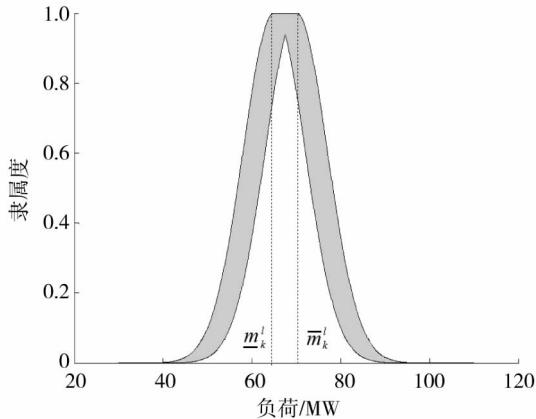


图2 具有变化均值的高斯主隶属度函数

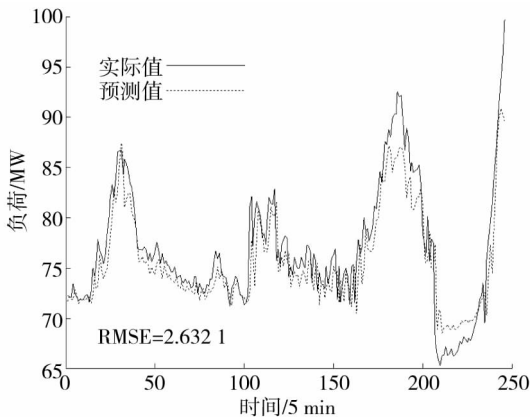


图3 一型 TSK 模糊系统的预测结果

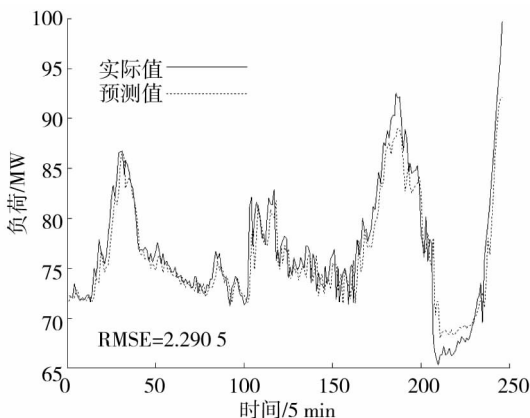


图4 二型 TSK 模糊系统的预测结果

从系统的设计过程以及预测结果可知,在相同的规则数目下,一阶区间二型 A2 - C1 TSK 模糊系统基于区间二型模糊集合而建立,其设计参数比一阶一型 TSK 模糊系统的多,更多的设计参数意味着更大的可调节自由度,因而提高了预测性能,使根均方误差从 2.632 1 下降到了 2.290 5。图3、图4中的预测曲线也验证了上述分析,2个系统都能较好地跟踪实际负荷曲线的趋势与走向,但一阶区间二型 A2 - C1 TSK 模糊系统的拟合性能更好,验证了二型 TSK 模糊系统在处理不确定方面的优越性。

4 结论

本文重点回顾了二型 TSK 模糊系统理论的研究现状,归纳了系统的适用范围及近年来的成功应用案例,并通过对短期电力负荷的预测实例验证了其在处理不确定方面的优越性。

1) 与一型 TSK 模糊系统相比,二型 TSK 模糊系统能更好的处理规则的不确定性,并对这些不确定性有较强的鲁棒性,因此在信号处理、鲁棒控制等领域有广泛的应用前景,是做模糊控制器的理想选择。

2) 目前,二型 TSK 模糊系统还存在实现困难、计算复杂的不足,如何减少计算量是目前亟待解决的问题。

3) 将不同的优化算法结合起来设计系统,能充分利用不同算法的优势,使系统性能更好、更加适于应用,是今后的研究热点。

参考文献:

- [1] Wang L X. A course in fuzzy systems and control [M]. Upper Saddle River, USA: Prentice Hall, 1996.
- [2] Castillo O, Melin P. Type - 2 fuzzy logic: theory and applications [M]. Berlin, Germany: Springer - Verlag, 2008.
- [3] Zadeh L A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning [J]. Information Sciences, 1975, 8(2): 199 - 249.
- [4] Mendel J M. Uncertain rule - based fuzzy logic systems: introduction and new direction [M]. Upper Saddle River, USA: Prentice Hall, 2001.
- [5] Mendel J M, John R I B. Type - 2 fuzzy sets made simple [J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2002, 10(2): 117 - 127.
- [6] Mendel J M. On a 50% savings in the computation of the centroid of a symmetrical interval type - 2 fuzzy set [J].

- Information Sciences, 2005, 172(4): 417 – 430.
- [7] Karnik N N, Mendel J M, Liang Q. Type – 2 fuzzy logic systems [J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 1999, 7(6): 643 – 658.
- [8] John R I B, Mendel J M. The extended sup – star composition for type – 2 fuzzy sets made simple [C]// Proceedings of IEEE International Conference on Fuzzy Systems. Vancouver, Canada: IEEE, 2006.
- [9] Karnik N N, Mendel J M. Type – 2 fuzzy logic systems; type – reduction [C]// Proceedings of IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics. San Diego, USA: IEEE, 1998.
- [10] Ren Q, Balazinski M, Baron L. Type – 2 TSK fuzzy logic system and its type – 1 counterpart [J]. International Journal of Computer Applications, 2011, 20(6): 8 – 13.
- [11] Takagi T, Sugeno M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control [J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 1985, 15(1): 116 – 132.
- [12] Ren Q, Baron L, Balazinski M. High order type – 2 TSK fuzzy logic systems [C]// Annual Meeting of the North American Fuzzy Information Processing Society. New York, USA: IEEE, 2008.
- [13] Wu D, Mendel J M. Enhanced Karnik – Mendel algorithms [J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2009, 17(4): 923 – 934.
- [14] 王建辉, 纪雯, 方晓柯, 等. 对区间二型模糊集的 EKM 降型法的改进 [J]. 控制与决策, 2013, 28(8): 1165 – 1172.
- [15] Celemin C E, Melgarejo M A. A faster iterative computation of the centroid of an interval type – 2 fuzzy set [C]// Annual Meeting of the North American Fuzzy Information Processing Society. Berkeley, USA: IEEE, 2012.
- [16] Begian M B, Melek W W, Mendel J M. Stability analysis of type – 2 fuzzy systems [C]// Proceedings of IEEE International Conference on Fuzzy Systems. Hong Kong, China: IEEE, 2008.
- [17] Lam H K, Seneviratne L D. Stability analysis of interval type – 2 fuzzy – model – based control systems [J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics, 2008, 38(3): 617 – 628.
- [18] Baklouti N, Alimi A M. Motion planning dynamic and unknown environment using an interval type – 2 TSK fuzzy logic controller [C]// Proceedings of IEEE International Conference on Fuzzy Systems. London, UK: IEEE, 2007.
- [19] Min L Y, Yuan S Y. Type – 2 T – S fuzzy impulsive control of nonlinear systems [J]. Applied Mathematical Modelling, 2012, 36(6): 2710 – 2723.
- [20] 生龙. 二型模糊系统理论及应用 [D]. 成都: 电子科技大学, 2012.
- [21] Méndez G M, Castillo O. Interval type – 2 TSK fuzzy logic systems using hybrid learning algorithm [C]// Proceedings of the 14th IEEE International Conference on Fuzzy Systems. Reno, USA: IEEE, 2005.
- [22] Liang Q, Mendel J M. Decision feedback equalizer for nonlinear time – varying channels using type – 2 fuzzy adaptive filters [C]// Proceedings of the Ninth IEEE International Conference on Fuzzy Systems. San Antonio, USA: IEEE, 2000.
- [23] Ren Q, Baron L, Balazinski M. Type – 2 Takagi – Sugeno – Kang fuzzy logic modeling using subtractive clustering [C]// Annual meeting of the North American Fuzzy Information Processing Society. Montreal, Canada: IEEE, 2006.