

功能梯度材料板中 P - SV 波的传播特性

陈海涛^{1,2}, 罗松南¹, 刘又文¹

(1. 湖南大学 机械与运载工程学院工程力学系, 湖南 长沙 410082; 2. 湖南工业大学 土木工程学院, 湖南 株洲 412007)

摘要: 了解功能梯度材料板中波的传播特性, 对这种材料的无损检测十分重要. 研究了非均匀 FGM 板中面内 PSV 波的传播规律, 采用 WKBJ 方法推导了 FGM 板中 PSV 波的频散关系方程式, 得出了 FGM 板 PSV 波的近似解析解, 同时给出了它们的数值实现算法, 以实用的金属(Ni) - 陶瓷(TiC)梯度材料板模型为实例, 研究了当板中几个材料参数变化时 PSV 波的频散关系变化规律, 并给出了 PSV 波波面上与各阶频散关系对应的位移分布曲线图, 板厚度变化时, 波数相应变化, 对应于同一导波相速度, 随着板的厚度增大, 面内耦合波波数相应减小, 当板厚度不变, 材料组成成分比率发生改变时, 波数相应发生变化, 当金属含量比率逐渐降低, 同样的相速度下, 耦合波的波数随之增大, 随着波速的增大, 频散曲线趋于平缓.

关键词: 功能梯度材料; 板; 弹性波; 频散

中图分类号: O374.4

文献标志码: A

文章编号: 1672-9102(2014)02-0104-05

Characteristics of P - SV waves propagation in the functionally graded material plate

CHEN Hai - tao^{1,2}, LUO Song - nan¹, LIU You - wen¹

(1. Department of Engineering Mechanics, Hunan University, Changsha 410082, China;

2. College of Civil Engineering, Hunan University of Technology, Zhuzhou 412007, China)

Abstract: It is very important to comprehend the characteristic of wave propagation in FGM plate for the material detecting without injury. The law of PSV wave propagation in inhomogeneous FGM plate were studied. The dispersion relations of PSV wave propagation in the functionally graded material plate were obtained by using the method of WKBJ. The approximate analytical solution of PSV wave propagation in the FGM plate was derived. The method of numerical calculation was provided. An example of Metal (Ni) - Ceramic (TiC) Practical FGM plate model, the dispersion relations of PSV wave propagation in the FGM plate with different material parameters were studied. And the displacement curves along the cross section were plotted, when plate thick changed, the wave number was changing accordingly, corresponding to the same phase velocity, the coupled wave numble decreased accordingly along with the plate's thick increasing, when plate's thick remian unchanged, the ingredient ratio of material changed, the wave number was changing accordingly, when the metal content ratio decreased gradually, the coupled wave number increased accordingly, under same phase velocity, dispersion cave slopes gently corresponded to wave velocity increasing.

Key words: functionally graded material; plate; elasticwaves; dispersion

功能梯度材料(FGM)于20世纪80年代随着航空航天行业的需求而得到发展,功能梯度材料的应用越来越广泛,但功能梯度材料在制造、使用过程中都会由于损伤而在构件内部产生缺陷,对构

件的安全使用造成了危险,所以功能梯度材料的无损检测就十分重要了,因此,了解弹性波在功能梯度材料中的传播特性具有重要意义.对均匀材料中弹性波的传播已经得到了广泛研究,然而,由于功

能梯度材料板的非均匀性使得其中弹性波研究较为困难,特别是在大型梯度材料板的无损检测方面依然没有什么进展,就是由于波在板中的传播规律的复杂性,难以透彻掌握.目前国内外的研究状况基本如下.

Chen W Q, Wang H M, Bao R H^[1]运用分层矩阵法分析了梯度材料板中弹性波传播的一些特性. Jacqueline Vollmann, Dieter M^[2]等采用有限差分法研究了铝铁复合功能梯度材料构件中弹性波的一些传播特性; Patel B P, Gupta S S, Loknath M S^[3]等采用高阶模态理论研究了功能梯度材料圆柱体的一些动力学力学特性; Imaimouni L E, Lefebvre J E, Zhang V^[4], Seyy M, Hashe Minejad, Maleki M^[5]; 以及 Hirotaka Sato, Yasuhide^[6]等分析了梯度材料圆柱体中波传播的一些特性; 黄自萍、张铭、吴文青^[7]等基于有限元法与有限差分法联合的区域分裂法研究了弹性波的数值模拟过程. 罗松南, 周正平, 程红梅,^[8-9]童桦^[10]基于分层法研究了弹性波在混凝土中的传播特性; 上述研究, 一部分使用传递矩阵法均需要对构件分层进行, 另一部分则采用有限元法等数值方法或其改进方法, 对功能梯度材料板中面内 PSV 波特性和进行不分层的解析研究或数值研究, 由于其数学上的复杂性, 目前还很少见有研究.

本文采用的整体分析方法建立了数学计算模型, 采用 WKBJ 方法研究了功能梯度材料板多个弹性参数同时变化时面内 PSV 波的传播特性. 不用分层得到其近似解析解, 并以金属 Ni-陶瓷 TiC 材料合成的功能梯度板为实例计算, 得到功能梯度材料板中多个参数变化时 PSV 波的频散关系图以及对应于各阶频散关系的位移曲线图, 所得结论可为 FGM 的无损检测和动力反应问题分析提供参考依据.

1 力学模型及其基本方程式

功能梯度材料弹性板力学模型如图 1 所示, 水平方向无限大, y 轴为出面方向, 板的厚度为 h 考虑面内运动.

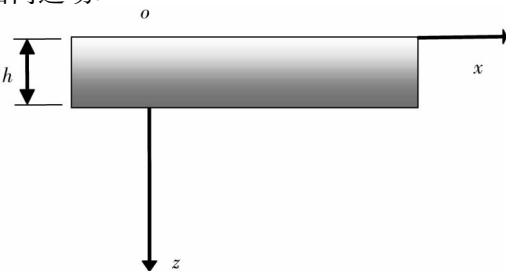


图 1 梯度材料板计算模型图

因为是平面应变的面内运动, 所以位移分量假设为

$$v = 0. \quad (1)$$

$$u = u(x, z, t). \quad (2)$$

$$w = w(x, z, t). \quad (3)$$

拉梅常数 λ, μ 是沿板厚度方向连续变化的函数关系.

令纵波波速为

$$\alpha = \alpha(z) = \sqrt{\frac{\lambda(z) + 2\mu(z)}{\rho(z)}}. \quad (4)$$

令横波波速为

$$\beta = \beta(z) = \sqrt{\frac{\mu(z)}{\rho(z)}}. \quad (5)$$

位移表示的运动微分方程组为

$$\alpha^2(z) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + [\alpha^2(z) - \beta^2(z)] \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + \beta^2(z) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \left(\frac{1}{\rho(z)} \frac{\partial \mu}{\partial z}\right) \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (6)$$

$$\alpha^2(z) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + [\alpha^2(z) - \beta^2(z)] \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \beta^2(z) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(\frac{1}{\rho(z)} \frac{\partial \lambda}{\partial z}\right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + \frac{2}{\rho(z)} \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (7)$$

令波场为沿水平 x 方向传播, 即

$$u = f(z) \exp[i(\kappa x - \omega t)]. \quad (8)$$

$$w = g(z) \exp[i(\kappa x - \omega t)]. \quad (9)$$

代入运动微分方程式(6)和式(7)式得

$$\beta^2(z) \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \left\{ \frac{1}{[\beta^2(z) - \alpha^2(z)] \rho^2(z)} \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial \lambda}{\partial z} + \omega^2 - \alpha^2(z) \kappa^2 \right\} f(z) = 0. \quad (10)$$

$$\alpha^2(z) \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} + \left\{ \frac{1}{[\beta^2(z) - \alpha^2(z)] \rho^2(z)} \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial \lambda}{\partial z} + \frac{2}{[\beta^2(z) - \alpha^2(z)] \rho^2(z)} \frac{\partial^2 \mu}{\partial z^2} + \omega^2 - \beta^2(z) \kappa^2 \right\} g(z) = 0. \quad (11)$$

对于高频波, 由式(10)进一步简可得

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \kappa^2 \left[\frac{c^2}{\beta^2(z)} - \frac{\alpha^2}{\beta^2(z)} \right] f(z) = 0. \quad (12)$$

由式(11)进一步简化可得

$$\frac{\partial^2 g}{\partial z^2} + \kappa^2 \left[\frac{c^2}{\alpha^2(z)} - \frac{\beta^2}{\alpha^2(z)} \right] g(z) = 0. \quad (13)$$

上两式为 S-L 型微分方程组, 设

$$\gamma_1^2(z) = \frac{c^2 - \beta^2(z)}{\alpha^2(z)}. \quad (14)$$

$$\gamma_2^2(z) = \frac{c^2 - \alpha^2(z)}{\beta^2(z)}. \quad (15)$$

则式(13) 改写为

$$\frac{\partial^2 g}{\partial z^2} + \kappa^2 \gamma_1^2(z)g = 0. \tag{16}$$

则式(12) 改写为

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \kappa^2 \gamma_2^2(z)f = 0. \tag{17}$$

2 方程式求解

由 WKBJ 法求解式(16), 得其通解为

$\gamma(z) < 0$ 时:

$$g(z) = A [1 - \gamma_1(z)]^{-\frac{1}{4}} \exp \left[\kappa \int \sqrt{-\gamma_1(z)} dz \right] + B [1 - \gamma_1(z)]^{-\frac{1}{4}} \exp \left[\kappa \int \sqrt{-\gamma_1(z)} dz \right]. \tag{18}$$

$\gamma(z) > 0$ 时:

$$g(z) = A [\gamma_1(z)]^{-\frac{1}{4}} \cos \left[\kappa \int \sqrt{\gamma_1(z)} dz \right] + B [\gamma_1(z)]^{-\frac{1}{4}} \sin \left[\kappa \int \sqrt{\gamma_1(z)} dz \right]. \tag{19}$$

由 WKBJ 法求解式(17), 得其通解为

$\gamma(z) < 0$ 时:

$$f(z) = C [1 - \gamma_2(z)]^{-\frac{1}{4}} \exp \left[\kappa \int \sqrt{-\gamma_2(z)} dz \right] + D [1 - \gamma_2(z)]^{-\frac{1}{4}} \exp \left[\kappa \int \sqrt{-\gamma_2(z)} dz \right]. \tag{20}$$

$\gamma(z) > 0$ 时:

$$f(z) = C [\gamma_2(z)]^{-\frac{1}{4}} \cos \left[\kappa \int \sqrt{\gamma_2(z)} dz \right] + D [\gamma_2(z)]^{-\frac{1}{4}} \sin \left[\kappa \int \sqrt{\gamma_2(z)} dz \right]. \tag{21}$$

对于自由边界条件:

$$\begin{cases} \sigma_z = 0; \\ \tau_{zx} = 0. \end{cases} \tag{22}$$

对于上表面, 即 $z=0$ 时, 考虑边界条件式(22) 可得方程

$$[\lambda(0) + 2\mu(0)] [1 - \gamma_1(0)]^{-\frac{1}{4}} A + [\lambda(0) + 2\mu(0)] \gamma_1(0)^{-\frac{1}{4}} \sqrt{\gamma_1(0)} \kappa B + i\mu(0) \gamma_2(0)^{-\frac{1}{4}} \kappa C = 0. \tag{23}$$

$$i\kappa \gamma_1(0)^{-\frac{1}{4}} A + \mu(0) [1 - \gamma_2(0)]^{-\frac{1}{4}} C + \mu(0) \kappa \gamma_2(0)^{-\frac{1}{4}} \sqrt{\gamma_2(0)} D = 0. \tag{24}$$

对于下表面, 即 $z=h$ 时, 考虑边界条件式(22) 可得方程

$$[\lambda(h) + 2\mu(h)] \left\{ \begin{aligned} & [1 - \gamma_1(h)]^{-\frac{1}{4}} \cos \left[\kappa \int_0^h \sqrt{\gamma_1(s)} ds \right] - \\ & [1 - \gamma_1(h)]^{-\frac{1}{4}} \sin \left[\kappa \int_0^h \sqrt{\gamma_1(s)} ds \right] \kappa \sqrt{\gamma_1(h)} \end{aligned} \right\} A +$$

$$[\lambda(h) + 2\mu(h)] \left\{ \begin{aligned} & [1 - \gamma_1(h)]^{-\frac{1}{4}} \sin \left[\kappa \int_0^h \sqrt{\gamma_1(s)} ds \right] + \\ & [1 - \gamma_1(h)]^{-\frac{1}{4}} \cos \left[\kappa \int_0^h \sqrt{\gamma_1(s)} ds \right] \kappa \sqrt{\gamma_1(h)} \end{aligned} \right\} B +$$

$$i\kappa \mu(h) \gamma_2(h)^{-\frac{1}{4}} \cos \left[\kappa \int_0^h \sqrt{\gamma_2(s)} ds \right] C +$$

$$i\kappa \mu(h) \gamma_2(h)^{-\frac{1}{4}} \sin \left[\kappa \int_0^h \sqrt{\gamma_2(s)} ds \right] D = 0. \tag{25}$$

$$[i\kappa] \gamma_1(h)^{-\frac{1}{4}} \cos \left[\kappa \int_0^h \sqrt{\gamma_1(s)} ds \right] A +$$

$$i\kappa \gamma_1(h)^{-\frac{1}{4}} \sin \left[\kappa \int_0^h \sqrt{\gamma_1(s)} ds \right] B +$$

$$\mu(h) \left\{ \begin{aligned} & [1 - \gamma_2(h)]^{-\frac{1}{4}} \cos \left[\kappa \int_0^h \sqrt{\gamma_2(s)} ds \right] - \\ & [1 - \gamma_2(h)]^{-\frac{1}{4}} \sin \left[\kappa \int_0^h \sqrt{\gamma_2(s)} ds \right] \kappa \sqrt{\gamma_2(h)} \end{aligned} \right\} C +$$

$$\mu(h) \left\{ \begin{aligned} & [1 - \gamma_2(h)]^{-\frac{1}{4}} \sin \left[\kappa \int_0^h \sqrt{\gamma_2(s)} ds \right] + \\ & [1 - \gamma_2(h)]^{-\frac{1}{4}} \cos \left[\kappa \int_0^h \sqrt{\gamma_2(s)} ds \right] \kappa \sqrt{\gamma_2(h)} \end{aligned} \right\} D = 0. \tag{26}$$

由以上式(23)、式(24)、式(25)、式(26) 4 个方程组成的关于系数 A, B, C, D 的线性齐次代数方程组, 该方程组有非零解的充要条件是其系数行列式等于零, 则由该条件可以得到关于 PSV 波传播的关于相速度 c 与波数 κ 之间的频散关系方程式, 可记作

$$Q(c, \kappa) = 0. \tag{27}$$

该方程为一个十分复杂的包含积分的超越方程, 只能采用数值方法求解.

3 实例分析

研究模型采用金属 (Ni) - 陶瓷 (TiC) 梯度材料板模型, 选用的几何模型是金属 Ni 和陶瓷材料 TiC 的梯度混合结构, 上表面是陶瓷 TiC, 下表面为金属 Ni, 并且材料的组成从一侧到另一侧作梯度连续变化. 具体尺寸为厚度 h 分别取 3.5 mm, 5.5 mm, 7.5 mm, 两长度方向为无限大的薄板结构.

根据频散式(27) 的一些基本特性, 即依照导波相速度 c 取值范围分别在小于板的最小横波波速内取值、导波相速度 c 取值范围在板最大横波波速与最小纵波波速之间取值、导波相速度 c 取值范围在大于板的最小纵波波速取值, 可以用性质不同的 2 个区域进行分析:

由式(4) 计算最小纵波波速及最大纵波波速,

由式(5)计算可得该功能梯度材料板的最小横波波速,最大横波波速.

1)当 $\frac{\omega}{\beta_{max}} > \kappa > \frac{\omega}{\alpha_{min}}$ 时,分别取板厚 h 为 3.5 mm, 5.5 mm, 7.5 mm, 可以绘出 FGM 板厚度变化时其频散关系图,由式(27)计算可得前 5 阶频散关系如下图 2 所示,图中 5 条曲线从下至上依次为 $n=0, n=1, n=2, n=3, n=4$ 阶的频散关系曲线,横坐标表示相速度 c (km/s),纵坐标表示波数 κ . 从图中可以看出,阶次越高,频散关系具有越强的非线性特性;随着功能梯度板厚度的增加,对应同样的相速度,PSV 耦合波的波数越来越大.

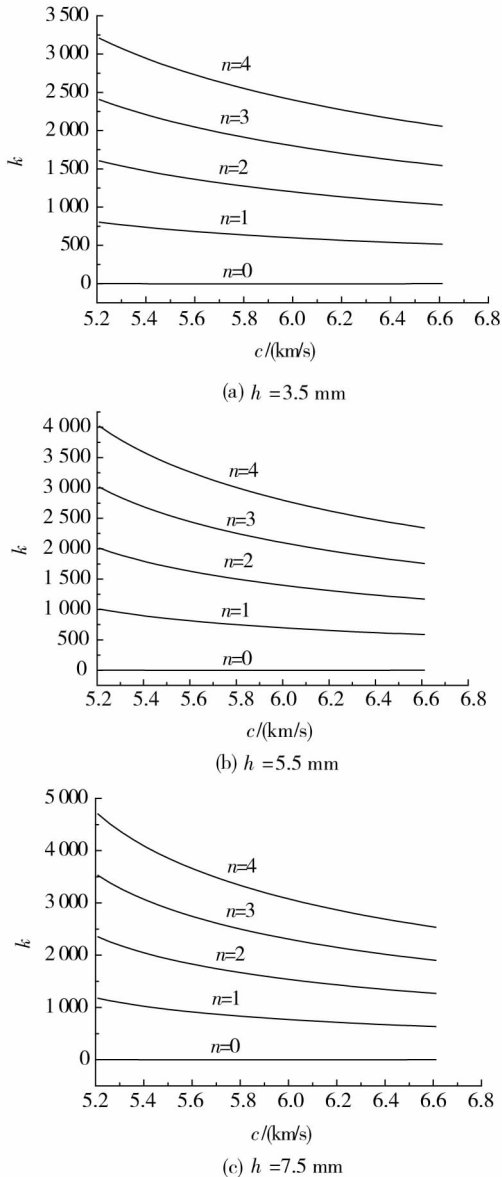


图2 板厚度 h 变化时 PSV 耦合波频散曲线变化图

当 $\frac{\omega}{\beta_{max}} > \kappa > \frac{\omega}{\alpha_{min}}$ 时,由式(27)计算可以绘出当材料参数变化(2种组成成分材料体积含量变

化)时,图 3 给出了功能梯度板中金属 Ni 不同含量时的 PSV 波传播时的频散曲线,图中 5 条曲线从下至上依次为 $n=0$ 阶、 $n=1$ 阶、 $n=2$ 阶、 $n=3$ 阶、 $n=4$ 阶的频散关系曲线,横坐标表示相速度 c (km/s),纵坐标表示导波波数 κ 从图中可以看出,随着金属 Ni 含量 t 的减少,对应同样的相速度下,PSV 耦合波的波数随之增大.

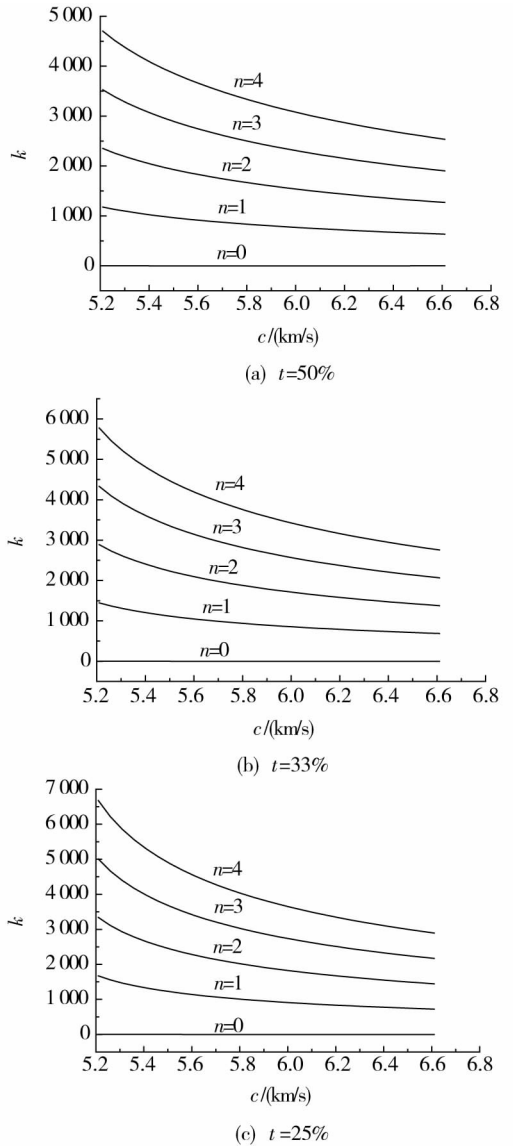


图3 Ni 体积含量 t 变化时 PSV 耦合波频散曲线变化图

2)当 $\kappa < \frac{\omega}{\alpha_{max}}$ 时,式(27)无解.

当板厚度 h 为 7.5 mm 时,前 5 阶模态的横截面上的位移分布如图 4 所示,横坐标表示板厚方向坐标 z (mm),纵坐标表示 PSV 耦合波面内位移 (μm),从图中可以看出,由于上下表面材料不同,位移分布也具有不同的特征,上表面 ($z = 0$ 处) 总具有位移的绝对值的最大值.

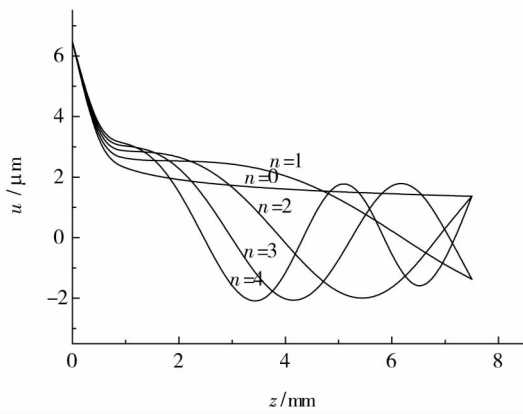


图4 板厚度为7.5 mm的PSV耦合波5阶模态纵向位移图

4 结论

分析了功能梯度材料板层中PSV波耦合导波的传播特性,推导出功能梯度材料板中PSV耦合波传播的频散关系方程式,计算了常见的金属—陶瓷功能梯度材料板面内PSV耦合波传播时的频散关系($c-\kappa$),绘制了板厚度变化和材料组成成份时的频散关系图.通过实例计算分析发现:

1) PSV面内耦合导波在功能梯度材料板传播时,其频散关系表现为导波数 κ 随着波速 c 的变化,当导波波速大于最大横波波速 β_{\max} 且小于最小纵波波速 α_{\min} 时,其频散关系表明波数 κ 随着波传播的相速度 c 呈非线性关系.对应不同阶次的模态,非线性强弱不同,当模态阶次越高时,呈现出越强的非线性特征.

当导波波速大于最大纵波波速 α_{\max} 时,则当为高频波时,频散关系方程无解.

2) 当梯度材料板的厚度变化时,波数 κ 相应变化.对应于同一导波相速度,随着板的厚度增大,面内耦合波波数相应减小.

3) 当厚度不变,2种材料参数组成成分比率发生改变时,频散关系图中的波数 κ 在某一区间会相应发生变化,取波速 c 在5.21 km/s至6.61 km/s之间.从图中可以看出,当金属含量比率逐渐降低,对应同样的相速度下,PSV耦合波的波数随之增大.随着波速 c 的增大, $c-\kappa$ 斜率越来越小,频散曲线趋于平缓.

4) 给出了波面上PSV耦合波的位移分布曲线图.功能梯度材料板中位移场的分布比均匀材料板中的位移场要复杂得多,对于低阶PSV耦合导波模式,位移场的幅度小一些,各阶模态对应的最大位移幅度均发生在金属含量最低的表面($z=0$).

这里所给出的研究结果,在应用弹性波对功能梯度材料板进行无损检测时,具有参考价值.

参考文献:

- [1] Bernard C, Michel D, Gérard A, et al. Waves in some functionally graded materials [J]. *European Journal of Mechanics A/solids*, 2006, 25(4): 695-706.
- [2] Jacqueline V, Dieter M, Jürg B, et al. Elastodynamic wave propagation in graded materials, simulations, experiments, phenomena, and applications [J]. *Ultrasonics*, 2006, 44(6): 1215-1221.
- [3] Patel B P, Gupta S S, Loknath M S, et al. Free vibration analysis of functionally graded elliptical [J]. *Composite Structures*, 2005, 69(8): 259-270.
- [4] Elmainmouni L, Lefebvre J E, Zhang V, et al. Guided waves in radially graded cylinders: a polynomial approach [J]. *Nondestructive Testing and Evaluation International*, 2005, 38(4): 344-353.
- [5] Seyyed M H, Hashe M, Maleki M. Interaction of a plane progressive sound wave with a functionally graded spherical shell [J]. *Ultrasonics*, 2006, 45(9): 165-177.
- [6] Hirota S, Yasuhide S. Multiple scattering of plane elastic waves in a particle-composite medium with graded interfacial layers [J]. *Mechanics of Materials*, 2003, 35(2): 83-106.
- [7] 黄自萍, 张铭, 吴文青. 弹性波传播数值模拟的区域分裂法 [J]. *地球物理学报*, 2004, 71(6): 1094-1100.
- [8] 罗松南, 程红梅, 童桦. 粘弹性损伤混凝土介质中的传播 [J]. *应用力学学报*, 2005, 22(4): 657-660.
- [9] 罗松南, 程红梅. 波在局部损伤混凝土介质中的传播 [J]. *湖南大学学报(自然科学版)*, 2002, 29(2): 20-23.
- [10] 童桦, 周正平, 罗松南. 非均匀损伤介质中波传播的数值解 [J]. *力学季刊*, 2005, 26(1): 53-59.