第 29 卷 第 2 期　湖南科技大学学报(自然科学版)　Vol. 29 No. 2
2014 年　6 月　Journal of Hunan University of Science & Technology(Natural Science Edition)　Jun. 2014

doi:10. 13582/j. cnki. 1672 - 9102. 2014. 02. 024

$CP^n(A)$ 的加权 blowup 及陈 - 阮上同调环

林奕武

(广东金融学院 应用数学系,广东 广州 510275)

摘　要:orbifold 是带有奇点结构的的广义流形,其具有整体的拓扑结构和局部的奇性结构. 以加权射影空间 $CP^n(A)$ 为例子,利用代数几何的方法,对 orbifold 的奇点进行加权 blowup. 分析 blowup 之后其所有奇点集,即 sector 的变化. 利用 abelian orbifold 的 de Rham 模型,计算所有 sector 的奇异上同调. 根据阶转移数的变化,计算新的 orbifold 即 $Bl(CP^n(A))$ 陈 - 阮上同调. 最后通过对比得到 blowup 前后陈 - 阮上同调的关系.

关键词:加权射影空;加权 blowup;陈 - 阮上同调

中图分类号:O189. 23　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672 - 9102(2014)02 - 0115 - 06

The blowup of the weighted projective space and its Chen - Ruan cohomology ring

LIN Yi - wu

(Department of Applied Mathematics, Guangdong University of Finance, Guangzhou 510275, China)

Abstract: Orbifold is a generalized manifold, which is a topological space with of singular points. The weighted projective space $CP^n(A)$ was blown up at a singular point, using the method of algebraic geometry. and the change of all twisted sectors and degree was studied shifting numbers after blowing up. The Chen - Ruan cohomology ring of the blowup was calculated and then the difference was showed from the Chen - Ruan cohomology ring of to the one of $CP^n(A)$ its blowup.

Key words: weighted projective space; weighted blowup; Chen - Ruan cohomology.

众所周知, orbifold 理论涉及数学的众多分支, 如拓扑学, 代数几何与弦理论等. 上世纪 50 年代, Satake[1-2] 首次在拓扑与微分几何领域中引进 orbifold 的概念. 他视 orbifold 为光滑流形的推广, 并称之为 V - 流形. 传统上, orbifold 被视为带有奇点的“流形”. 如在代数几何中常称 orbifold 为带商奇性的簇, 即将 orbifold 奇性视为拓扑空间的内蕴结构. 在拓扑中, 常常将 orbifold 奇性视为拓扑流形上的一个 orbifold 结构, 类似于拓扑流形的光滑结构. 对于 orbifold 的奇点,我们可以用多种方法将其消去. 在代数几何中,常用的方法有形变和解消. 对于辛 orbifold, Godinho[3] 利用 blowup 的方法消去奇点. 每次 blowup 之后,奇点的局部子群的阶数严格变小. 那么经过有限次 blowup 可使得局部子群的阶数减小到 1, 从而达到消去奇点的目的.

在 orbifold 范畴,也可以得到类似于光滑流形范畴的 de Rham 理论,见文献[4]. 利用 orbifold 卡的局部相容性,可以定义 orbifold 的 de Rham 上同调. 但是,Satake 指出,这样定义的 deRham 上同调同构于其底空间的平常上同调,即与 orbifold 的局部卡结构无关. 那么 orbifold 的 deRham 上同调将无法刻画 orbifold 的奇性结构.

2004 年, Chen - Ruan[5] 定义了一种新的

收稿日期:2013 - 11 - 28

基金项目:国家自然科学基金资助项目(11201087;11226034)

通信作者:林奕武(1980 -),男,广东汕头人,博士,讲师,主要从事 orbifold 及陈 - 阮上同调的研究. E - mail:linyiwu@ tom. com

orbifold 上同调,即陈 - 阮上同调. 陈 - 阮上同调不但体现了 orbifold 的整体结构,还刻画了 orbifold 局部上的奇性结构. 所以陈 - 阮上同调提出之后,引起了广泛的关注. Jiang[6] 计算了加权射影空间的陈 - 阮上同调. 其他如 Poddar 等在陈 - 阮上同调的计算方面也做了一系列的工作. 对于 abelian orbifold 的情形, Chen - Hu[7] 引进了 de Rham 模型,很大程度上简化了陈 - 阮上同调的计算.

Orbifold 的陈 - 阮上同调的与其 crepant 解消的平常上同调有着密切的关系. Ruan[8] 猜想,如果 orbifold 的解消是 hyperkahler 解消,则此 orbifold 的陈 - 阮上同调必同构于解消后的平常上同调. 本文对加权射影空间进行加权 blow up,并研究 blow up 之后陈 - 阮上同调的变化.

文章主要部分分为四节,即第一节到第四节. 第一节主要介绍加权射影空间的加权 blow up,并且分析 blowup 之后所有 sector 的变化. 第二节主要介绍 abelian orbifold 的 de Rham 模型以及加权射影空间的陈 - 阮上同调. 第三节主要计算 blowup 之后所有 sector 的平常上同调环. 第四节主要主要计算 blowup 之后的陈 - 阮上同调,并且比较陈 - 阮上同调环在 blowup 前后的变化. 最后得到的结论是定理 4.7.

1 blowup 及 sector 的变化

定义 1 设 $A = (q_0, \cdots, q_n)$ 为 $n+1$ 元正整数组,不妨设 $q_0 \geqslant q_1 \geqslant \cdots \geqslant q_n$,令 $V = (C^{n+1})^*$,

$\rho_A: C^* \to GL(n+1, C)$,

$z \mapsto \mathrm{diag}(z^{q_0}, \cdots, z^{q_n})$

称 $CP^n(A) = V/\rho_A$ 为一个加权射影空间.

令 $J_i: C^n \to CP^n(A)$

$(z_0, \cdots, z_{i-1}, z_{i+1}, \cdots, z_n)$ $[z_0, \cdots, z_{i-1}, 1, z_{i+1}, \cdots, z_n]$.

其中 $0 \leqslant i \leqslant n$. 则 $\{(C^n, Z_{q_i}, J_i) \mid 0 \leqslant i \leqslant n\}$ 为 $CP^n(A)$ 的一个 orbifold 覆盖.

设 $I = \{\lambda \in S^1 \mid$ 存在 i,使得 $\lambda^{q_i} = 1\}$,对于 $\lambda \in I$,记 $V^\lambda = \{(z_0, \cdots, z_n) \in V \mid$ 若 $\lambda^{q_i} \neq 1$,则 $z_i = 0\}$,令 $X_\lambda = V^\lambda / \rho_{A_\lambda}$,其中 ρ_{A_λ} 为 ρ_A 在 V^λ 上的限制. 显然 X_λ 也是一个加权射影空间.

记 $x = [1, 0, \cdots, 0] \in CP^n(A)$, $I_1 = \{\lambda \in I \mid \lambda^{q_0} \neq 1\}$, $I_2 = \{\lambda \in I \mid \lambda^{q_0} = 1\}$. 可以把 $CP^n(A)$ 的 sector 分为 2 类:

1) 不包含 x 的 sector,其全体为 $\{X_\lambda \mid \lambda \in I_1\}$,

2) 包含 x 的 sector,其全体为 $\{X_\lambda \mid \lambda \in I_2\}$.

下面在 x 处对 $CP^n(A)$ 进行加权 blowup. 令

$Bl(CP^n(A)) = \{([z_0, z_1, \cdots, z_n], [\lambda_1, \cdots, \lambda_n]) \in CP^n(A) \times CP^{n-1}(q_1, \cdots, q_n) \mid z_i^{\frac{q_j}{a_{ij}}} \lambda_j^{\frac{q_i}{a_{ij}}} = z_j^{\frac{q_i}{a_{ij}}} \lambda_i^{\frac{q_j}{a_{ij}}}, 1 \leqslant i, j \leqslant n\}$. 其中 a_{ij} 为 q_i 和 q_j 的最大公约数.

$Bl(CP^n(A))$ 还是一个 orbifold. 事实上,令

$\varphi_i: C^n \to Bl(CP^n(A))$

$(z_0, \cdots, z_{i-1}, z_{i+1}, \cdots, z_n) \mapsto ([1, z_1 z_0^{\frac{q_1}{q_0}}, \cdots, z_{i-1} z_0^{\frac{q_{i-1}}{q_0}}, z_0^{\frac{q_i}{q_0}}, z_{i+1} z_0^{\frac{q_{i+1}}{q_0}}, \cdots, z_n z_0^{\frac{q_n}{q_0}}], [z_1, \cdots, z_{i-1}, 1, z_{i+1}, \cdots, z_n])$. 则 $\{(C^n, Z_{q_i}, J_i) \mid 0 \leqslant i \leqslant n\} \cup \{(C^n, Z_{q_i}, \varphi_i) \mid 0 \leqslant i \leqslant n\}$ 为 $Bl(CP^n(A))$ 的一个 orbifold 覆盖.

定义 $CP^n(A)$ 在 x 处的加权 blowup 为

$\mu: Bl(CP^n(A)) \to CP^n(A)$

$([z_0, z_1 \cdots, z_n], [\lambda_1 \cdots, \lambda_n]) \mapsto [z_0, z_1 \cdots, z_n]$.

这里用代数几何的方法定义了 $CP^n(A)$ 的加权 blowup,而 Godinho[3] 用辛几何的方法定义了一般 orbifold 的加权 blowup,对于 $CP^n(A)$ 来说,容易验证这 2 种 blowup 是等价的.

设 $\lambda \in I_2$, 且存在 $i > 0$, 使得 $\lambda^{q_i} = 1$. 由于 X_λ 也为加权射影空间,从而也有 X_λ 在 x 处的加权 blowup

$\mu_\lambda: Bl(X_\lambda) \to X_\lambda$.

易知 $\mu^{-1}(x) = CP^{n-1}(q_1, \cdots, q_n)$. 于是 $\mu^{-1}(x)$ 为 $Bl(CP^n(A))$ 的一个子 orbifold. 令

$J = \{\lambda \in S^1 \mid$ 存在 $i > 0, \lambda^{q_i} = 1\}$,

$Bl(CP^n(A))$ 的所有 sector 都是加权射影空间, 且与 J 一一对应, 记为 $\{Z_\lambda \mid \lambda \in J\}$. 令

$J_3 = \{\lambda \in J \mid \lambda^{q_0} \neq 1\}$.

$Bl(CP^n(A))$ 的 sector 可分为 3 类:

1) 包含于 $Bl(CP^n(A)) \backslash \mu^{-1}(x)$ 的 sector, 其全体为 $\{X_\lambda \mid \lambda \in I_1\}$,

2) 不包含于 $Bl(CP^n(A)) \backslash \mu^{-1}(x)$ 或 $\mu^{-1}(x)$ 的 sector,其全体为

$\{Bl(X_\lambda) \mid \lambda \in I_2$ 且存在 $i > 0, \lambda^{q_i} = 1\}$,

3) 包含于 $\mu^{-1}(x)$ 的 sector, 其全体为 $\{Z_\lambda \mid \lambda \in J_3\}$.

接着, 由于 X_λ 为加权射影空间, 根据 T. Kawasaki[9], X_λ 的奇异上同调群为

$$H^i(X_\lambda; Q) = \begin{cases} Q, & 0 \leqslant i \leqslant 2\dim_C(Bl(X_\lambda)); \\ 0, & 其它。 \end{cases}$$

利用 M－V 序列，根据文献[10]也可求得 $Bl(X_\lambda)$ 的奇异上同调群为

$$H^i(Bl(X_\lambda);Q)=\begin{cases}Q, i=0 \text{ 或 } i=2\dim_C(Bl(X_\lambda));\\ Q\oplus Q, i=2p \text{ 或 } 0<p<\dim_C(Bl(X_\lambda));\\ 0, \text{其它。}\end{cases}$$

2 abelian orbifold 的 de Rham 模型以及 $CP^n(A)$ 的陈－阮上同调

对于一般的 orbifold，其陈－阮上同调的乘法是很复杂的. 根据文献[7]，对于 abelian orbifold，可以引入 de Rham 模型，简化陈－阮上同调的乘法计算. 其实 de Rham 模型主要给出了阻碍丛的形象描述，从而可以清楚地看到陈－阮上同调的乘法结构. 下面介绍 abelian orbifold 的阻碍丛和陈－阮上同调的乘法. 根据文献[7]，对于 abelian orbifold，即局部子群都为交换群的 orbifold，其阻碍丛和陈－阮上积可以如下描述：

定义 2　若 X 为复 abelian orbifold，X_{λ_1} 和 X_{λ_2} 为 X 的 sector，满足 $X^2_{(\lambda_1,\lambda_2)}\neq\varphi$. 把法丛 $N_{X^2_{(\lambda_1,\lambda_2)}|X}$ 分解为线丛的直和，即

$$N_{X^2_{(\lambda_1,\lambda_2)}|X}=\bigoplus_{j=1}^{k}L_j.$$

其中，L_j 在局部上为 λ_1 和 λ_2 的特征子空间，特征值分别为 $e^{i2\pi\theta_{1j}}$ 和 $e^{i2\pi\theta_{2j}}$ 并且

$0\leqslant\theta_{1j},\theta_{2j}<1$，则称 $E_{(\lambda_1,\lambda_2^2)}:=\bigoplus_{\theta_{1j}+\theta_{2j}>1}L_j$ 为 $X^2_{(\lambda_1,\lambda_2)}$ 上的阻碍丛.

取 U 为 $X^2_{(\lambda_1,\lambda_2)}$ 在 $X_{\lambda_1\times\lambda_2}$ 中的开邻域，U 可视为 $X^2_{(\lambda_1,\lambda_2)}$ 在法丛 $N_{X^2_{(\lambda_1,\lambda_2)}|X_{\lambda_1\times\lambda_2}}$ 中的开邻域. 设法丛投射为

$$pr:U\to X^2_{(\lambda_1,\lambda_2)}.$$

则有 Thom 同态

$$\Theta:H^*(X^2_{(\lambda_1,\lambda_2)})\to H^*(X_{\lambda_1\cdot\lambda_2})$$

$$\alpha\mapsto pr^*(\alpha)\wedge\Theta_{(\lambda_1,\lambda_2)}.$$

其中，$\Theta_{(\lambda_1,\lambda_2)}$ 为法丛 $N_{X^2_{(\lambda_1,\lambda_2)}|X_{\lambda_1\times\lambda_2}}$ 的 Thom 类. 方便起见，把 $\alpha\wedge\Theta_{(\lambda_1,\lambda_2)}$ 简记为 $\alpha\wedge\Theta_{(\lambda_1,\lambda_2)}$.

定义 3　设 X 为复 abelian orbifold，X_{λ_1} 和 X_{λ_2} 为 X 的 sector，对于任意 $\alpha\in H^*(X_{\lambda_1})$，$\beta\in H^*(X_{\lambda_2})$，其陈阮上积定义为

$$\alpha\cup_{CR}\beta=\begin{cases}0, & X^2_{(\lambda_1,\lambda_2)}=\varphi;\\ e_1^*(\alpha)\wedge e_2^*(\beta)\wedge e(E^2_{(\lambda_1,\lambda_2)})\wedge\Theta_{(\lambda_1,\lambda_2)}, & X^2_{(\lambda_1,\lambda_2)}=\varphi.\end{cases}$$

其中，$e_1:X^2_{(\lambda_1,\lambda_2)}\to X_{\lambda_1}$，$e_2:X^2_{(\lambda_1,\lambda_2)}\to X_{\lambda_2}$ 为嵌入，$e(E^2_{(\lambda_1,\lambda_2)})$ 为阻碍丛的 Euler 类，$\Theta_{(\lambda_1,\lambda_2)}$ 对应的 Thom 类.

2003 年，Jiang[6] 计算了加权射影空间的陈－阮上同调. 之后，Chen 和 Hu[7] 利用 de Rham 模型清晰的给出了加权射影空间的陈－阮上同调的环结构.

令 $X=CP^n(A)$，$A=(q_0,\cdots,q_n)$. 取 $I=\{\lambda\in S^1\mid$ 存在 i，使得 $\lambda^{q_i}=1\}$. 对任意 $\lambda\in I$，令 $X_\lambda=\{[z_0,z_1,\cdots,z_n]\in CP^n(A)\mid$ 若 $\lambda^{q_i}\neq 1$，则 $z_i=0\}$. 则 $\{X_\lambda\mid\lambda\in I\}$ 为所有的 sector. 根据 Chen 和 Hu[7]，陈－阮上同调 $H^*_{CR}(X;Q)=\bigoplus_{\lambda\in I}H^*(X_\lambda;Q)$，且其环结构，即陈－阮上积如下：

对任意 $\xi_1^k\in H^*(X_{\lambda_1};Q)$，$\xi_2^k\in H^*(X_{\lambda_2};Q)$，$\xi_1^k\cup_{CR}\xi_2^k=\xi^{k+l+m}\in H^*(X_{\lambda_1\times\lambda_2};Q)$. 其中，$\xi$ 为 $H^*(X_{\lambda_1\times\lambda_2};Q)$ 的生成元，$m=\sum_{i=0}^{n}\left[\frac{1}{2\pi}\mathrm{Arg}(\lambda_1^{q_i})+\frac{1}{2\pi}\mathrm{Arg}(\lambda_2^{q_i})\right]$，$\left[\frac{1}{2\pi}\mathrm{Arg}(\lambda_1^{q_i})+\frac{1}{2\pi}\mathrm{Arg}(\lambda_2^{q_i})\right]$ 为不大于 $\frac{1}{2\pi}\mathrm{Arg}(\lambda_1^{q_i})+\frac{1}{2\pi}\mathrm{Arg}(\lambda_2^{q_i})$ 的最大整数.

例 1　令 $X=CP^n(6,4,3,2)$，则 $I=\{1,e^{\frac{1}{6}\times 2\pi i},e^{\frac{1}{4}\times 2\pi i},e^{\frac{1}{3}\times 2\pi i},e^{\frac{1}{2}\times 2\pi i},e^{\frac{2}{3}\times 2\pi i},e^{\frac{3}{4}\times 2\pi i},e^{\frac{5}{6}\times 2\pi i}\}$. 按顺序记为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_8$，其中 $I_1=\{\lambda_3,\lambda_7\}$，$I_2=\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_4,\lambda_5,\lambda_6,\lambda_8\}$. 所有 sector 为

$X_{\lambda_1}\cong CP^n(6,4,3,2)$，

$X_{\lambda_2}\cong X_{\lambda_8}\cong\{[z_0,z_1,z_2,z_3]\in CP^n(6,4,3,2)\mid z_1=z_2=z_3=0\}\cong\{*\}$，

$X_{\lambda_3}\cong X_{\lambda_7}\cong\{[z_0,z_1,z_2,z_3]\in CP^n(6,4,3,2)\mid z_0=z_2=z_3=0\}\cong\{*\}$，

$X_{\lambda_4}\cong X_{\lambda_6}\cong\{[z_0,z_1,z_2,z_3]\in CP^n(6,4,3,2)\mid z_1=z_3=0\}\cong CP^n(6,3)$，

$X_{\lambda_5}\cong\{[z_0,z_1,z_2,z_3]\in CP^n(6,4,3,2)\mid z_2=0\}\cong CP^n(6,4,2)$.

对于 $\xi_1^k\in H^*(X_{\lambda_1};Q)$，$\eta\in H^*(X_{\lambda_i};Q)$，$1\leqslant i\leqslant 8$，$\xi_1^k\cup_{CR}\eta=\xi_i^k\times\eta\in H^*(X_{\lambda_i};Q)$. 其中 ξ_i 为 $H^*(X_{\lambda_i};Q)$ 的生成元；

对于 $\xi_4^k\in H^*(X_{\lambda_4};Q)$，对于 $\xi_5^l\in H^*(X_{\lambda_5};Q)$，则

$$\xi_4^k\cup_{CR}\xi_5^l=\begin{cases}1, & k=l=0;\\ 0, & k>0 \text{ 或 } l>0.\end{cases}$$

对于 $1\in H^*(X_{\lambda_4};Q)$，$1\cup_{CR}1=\xi_6$ 为

$H^*(X_{\lambda_6};Q)$ 的生成元;

对于 $1 \in H^*(X_{\lambda_5};Q)$, $1 \cup_{CR} 1 = \xi_1$ 为 $H^*(X_{\lambda_1};Q)$ 的生成元.

3 blowup 后 sector 的 de Rham 上同调

接着讨论 $H^*(Bl(X_\lambda);Q)$ 的环结构. 先计算 $Bl(CP^n)$ 的上同调, 然后利用 $H^*(Bl(CP^n);Q)$ 的环结构来计算 $H^*(Bl(CP^n(A));Q)$ 以及 $H^*(Bl(X_\lambda);Q)$ 的环结构.

令 $x=[1,0,\cdots,0]$, 则 CP^n 在 x 处的平常 blowup 为

$$Bl(CP^n)=\{([z_0,z_1,\cdots,z_n],[\lambda_1,\cdots,\lambda_n])\in CP^n\times CP^{n-1}\mid z_i\lambda_j=z_j\lambda_i,1\leqslant i,j\leqslant n\}.$$

令

$$E=\{(z_0,z_1,\cdots,z_n,[\lambda_1,\cdots,\lambda_n])\in C^{n+1}\times CP^{n-1}\mid z_i\lambda_j=z_j\lambda_i,1\leqslant i,j\leqslant n\}.$$

则

$$\mu:E\to CP^{n-1}$$
$$(z_0,z_1,\cdots,z_n,[\lambda_1,\cdots,\lambda_n])\mapsto[\lambda_1,\cdots,\lambda_n]$$

为秩 2 的向量丛, 并且 $Bl(CP^n)$ 为 E 的投射化, 即 $Bl(CP^n)\cong P(E)$. 可以验证

$E\cong\vartheta_{CP^{n-1}}(1)\oplus E_2$, 其中 $\vartheta_{CP^{n-1}}(1)$ 为 CP^{n-1} 上的典型复线丛, E_2 为 CP^{n-1} 上的平凡线丛. 所以陈类 $c_1(E)=c_1(\vartheta_{CP^{n-1}}(1))$, $c_2(E)=0$. 令

$$S=\{(v_0,v_1,\cdots,v_n,[z_0,z_1,\cdots,z_n],[\lambda_1,\cdots,\lambda_n])\in C^n\times Bl(CP^n)\mid z_iv_j=z_jv_i,0\leqslant i,j\leqslant n\}.$$

则

$$p':S\to Bl(CP^n)$$
$$(v_0,v_1,\cdots,v_n,[z_0,z_1,\cdots,z_n],[\lambda_1,\cdots,\lambda_n])\mapsto([z_0,z_1,\cdots,z_n],[\lambda_1,\cdots,\lambda_n])$$

为 $P(E)$ 的万有子丛,并且下图表示拉回,

$$\begin{array}{ccc} S & \rightarrow & \vartheta_{CP^{n-1}}(1) \\ p'\downarrow & & \downarrow p \\ Bl(CP^n) & \xrightarrow{\mu} & CP^n \end{array}$$

图 1 p 和 μ 的拉回

于是 $c_1(S)=\mu^*(c_1(\vartheta_{CP^{n-1}}(1)))$. 根据文献 [11] 606 页命题

$$H^*(Bl(CP^n);Q)\cong H^*(CP^{n-1};Q)[c_1(S)]/[c_1(S)^2-c_1(S)c_1(\vartheta_{CP^{n-1}}(1))]\cong Z[\xi,\eta]/[\eta^n-\xi\eta].$$

现在计算 $H^*(Bl(CP^n(A));Q)$ 以及 $H^*(Bl(X_\lambda);Q)$ 的环结构. 令

$$p_A:Bl(CP^n)\to Bl(CP^n(A))$$
$$([z_0,z_1,\cdots,z_n],[\lambda_1,\cdots,\lambda_n])\mapsto([z_0^{q_0},z_1^{q_1},\cdots,z_n^{q_n}],[\lambda_1^{q_1},\cdots,\lambda_n^{q_n}]).$$

于是 $Bl(CP^n(A))=Bl(CP^n)/G_A$, 其中 $G_A=Z_{q_0}\times\cdots\times Z_{q_n}$ 且对于任意 $\xi_0\in\mathbf{Z}_{q_0}$,

$\xi_i\in\mathbf{Z}_{q_i}$, $i>0$ 和 $([z_0,z_1\cdots,z_n],[\lambda_1\cdots,\lambda_n])\in Bl(CP^n)$, 有

$$\xi_0\times([z_0,z_1,\cdots,z_n],[\lambda_1,\cdots,\lambda_n])=([\xi_0z_0,z_1,\cdots,z_n],[\lambda_1,\cdots,\lambda_n]),$$

$$\xi_i\times([z_0,z_1,\cdots,z_n],[\lambda_1,\cdots,\lambda_n])=([z_0,\cdots,\xi_iz_i,\cdots,z_n],[\lambda_1,\cdots,\xi_i\lambda_i,\cdots,\lambda_n]).$$

因此有环同构

$$p_A^*:H^*(Bl(CP^n(A));Q)\to H^*(Bl(CP^n);Q)^{G_A}.$$

而 $H^*(Bl(CP^n);Q)$ 的元素在 G_A 作用下不变, 所以

$$p_A^*:H^*(Bl(CP^n(A));Q)\to H^*(Bl(CP^n);Q)^{G_A}$$

为环同构. 由上面的讨论知, 可利用投射丛

$$\mu_1:Bl(CP^n(A))\to CP^{n-1}(q_1,\cdots,q_n)$$
$$([z_0,z_1,\cdots,z_n],[\lambda_1,\cdots,\lambda_n])\mapsto[\lambda_1,\cdots,\lambda_n]$$

来计算 $H^*(Bl(CP^n(A));Q)$ 的环结构, 如下命题

命题 1 $H^*(Bl(CP^n(A));Q)=Q[k,h]/[h^n,k^2-kh]$, 其中 $h=\mu_1^*(\eta)$, $k=\mu^*(\xi)$, η 和 ξ 分别为 $H^2(CP^{n-1}(q_1,\cdots,q_n);Q)$ 和 $H^2(CP^n(A);Q)$ 的生成元.

若 $\lambda\in I_2$, 且存在 $i\geqslant1$, $\lambda^{q_i}=1$ 由于 X_λ 在 x 处也有加权 blowup

$$\mu_\lambda:Bl(X_\lambda)\to X_\lambda.$$

所以, 同样的有 $H^*(Bl(X_\lambda);Q)=Q[k,h]/[h^r,k^2-kh]$, 其中 $r=\dim_C(X_\lambda)$, k 和 h 分别为 $H^*(X_\lambda;Q)$ 和 $H^*(\mu_\lambda^{-1}(x);Q)$ 的生成元在 $H^*(Bl(X_\lambda);Q)$ 上的拉回.

为了计算陈-阮上同调, 还需要考虑子空间法丛的的第一陈类. 对于加权射影空间 $CP^r(B)$, 其中 $B=(a_0,\cdots,a_r)$ 为 $r+1$ 元正整数组, 取 $x=[1,0,\cdots,0]\in CP^r(B)$, 设

$$\mu:Bl(CP^r(B))\to CP^r(B)$$

为 $CP^r(B)$ 在 x 处的加权 blowup. 令

$X_i = \{[z_0, z_1, \cdots, z_r] \in CP^r(B) \mid z_i = 0\}, 1 \leqslant i \leqslant r$,

$Y_i = \{[\lambda_1, \cdots, \lambda_r] \in CP^{r-1}(a_1, \cdots, a_r) \mid \lambda_i = 0\}, 1 \leqslant i \leqslant r$,

$F = \{([z_0, z_1, \cdots, z_r], [\lambda_1, \cdots, \lambda_r]) \in Bl(CP^r(B) \mid z_0 = \cdots = z_{i-1} = z_{i+1} = \cdots = z_r = 0$

或 $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{i-1} = \lambda_{i+1} = \cdots = \lambda_r = 0\}$

$K = \{[\lambda_1, \cdots, \lambda_r] \in CP^{r-1}(a_1, \cdots, a_r) \mid \lambda_1 = \cdots = \lambda_{i-1} = \lambda_{i+1} = \cdots = \lambda_r = 0\}$.

则 X_i 在 x 处也有加权 blowup

$\mu_\lambda : Bl(X_i) \to X_i$.

由于下图是拉回,

$$\begin{tikzcd} Bl(CP^r(B))\backslash F \arrow[r] \arrow[d, "q'"'] & CP^{r-1}a_1, \cdots, a_r) \arrow[d, "q"] \\ Bl(X_i) \arrow[r, "\mu_1"] & Y_i \end{tikzcd}$$

图2　q 和 μ_1 的拉回

其中 q, q' 为法丛投射. 所以有

命题2　$c_1(N_{Bl(X_i) \mid Bl(CP^n(B))}) = \mu_1^* c_1(N_{p_i^{-1}(x) \mid \mu^{-1}(x)})$.

4　blowup 后的陈－阮上同调

考察下面短正合序列:

$$0 \to H^*_{CR}(CP^n(A); Q)/H^*_{CR}(x; Q) \xrightarrow{\mu^*} H^*_{CR}(Bl(CP^n(A)); Q) \xrightarrow{j^*} H^*_{CR}(CP^{n-1}(q_1, \cdots, q_n); Q) \to 0$$

其中, 对于 μ^*,

1)若 $\lambda \in I_1$, μ^* 在 $H^*(X_\lambda; Q)$ 上的限制为

$id: H^*(X_\lambda; Q) \to H^*(X_\lambda; Q)$;

2)若 $\lambda \in I_2$, 且存在 $i > 0$, 使得 $\lambda^{q_i} = 1$, 则 μ^* 在 $H^*(X_\lambda; Q)$ 上的限制为

$\mu_\lambda^*: H^*(X_\lambda; Q) \to H^*(Bl(X_\lambda); Q)$;

对于 j^*,

1)若 $\lambda \in I_1$, 则 j^* 在 $H^*(X_\lambda; Q)$ 上的限制为

$j^*: H^*(X_\lambda; Q) \to 0$;

2) $\lambda \in I_2$, 且存在 $i > 0$, 使得 $\lambda^{q_i} = 1$, 则 j^* 在 $H^*(Bl(X_\lambda); Q)$ 上的限制为嵌入

$j_\lambda: Z_\lambda \to Bl(X_\lambda)$ 诱导的同态

$j_\lambda^*: H^*(Bl(X_\lambda); Q) \to H^*(Z_\lambda; Q)$;

3)若 $\lambda \in J_3$, 则 j^* 在 $H^*(Z_\lambda; Q)$ 上的限制为

$id: H^*(Z_\lambda; Q) \to H^*(Z_\lambda; Q)$.

对于任意 $\lambda \in I_2$, 且存在 $i > 0$, 使得 $\lambda^{q_i} = 1$. 由于 $X_\lambda, Bl(X_\lambda)$ 和 Z_λ 具有相同的阶转移数, 因此 μ^* 和 j^* 都保持阶转移数. 容易证明以上序列是一个群同态的正合序列, 所以有同调群同构

$$\varphi: H^*_{CR}(Bl(CP^n(A)); Q) \to H^*_{CR}(CP^n(A); Q)/H^*_{CR}(x; Q) \oplus H^*_{CR}(CP^{n-1}(q_1, \cdots, q_n); Q).$$

现在通过6个引理, 分步讨论 $H^*_{CR}(Bl(CP^n(A)); Q)$ 的环结构. 最后总结为定理1.

在下面引理1~6中, 为了方便, 当 $\lambda \in I$ 时, 记 $H^2(X_\lambda; Q)$ 的生成元为 ξ_λ; 当 $\lambda \in J$ 时, 记 $H^2(Z_\lambda; Q)$ 的生成元为 η_λ. 则当 $\lambda \in I_2$ 且存在 $i > 0, \lambda^{q_i} = 1$ 时, $H^2(Bl(X_\lambda); Q)$ 的生成元为 $\mu^*(\xi_\lambda)$ 和 $\mu_1^*(\eta_\lambda)$. 其中 $\mu: Bl(X_\lambda) \to X_\lambda$ 为加权 blowup, $\mu_1: Bl(X_\lambda) \to Z_\lambda$ 为投射丛投射.

引理1　对于 $\xi^k_{\lambda_1} \in H^{2k}(X_{\lambda_1}; Q), \mu_1^*(\eta^l_{\lambda_2}) \in H^{2l}(Bl(X_{\lambda_2}); Q)$, 其中 $\lambda_1 \in I_1, \lambda_2 \in I_2$, 且存在 $i > 0, \lambda_2^{q_i} = 1$, 则 $\xi^k_{\lambda_1} \cup_{CR} \mu_1^*(\eta^l_{\lambda_2}) = \xi^k_{\lambda_1} \cup_{CR} \xi^l_{\lambda_2} \in H^*(X_{\lambda_1 ? \lambda_2}; Q)$.

引理2　对于 $\xi^k_{\lambda_1} \in H^{2k}(X_{\lambda_1}; Q), \eta^l_{\lambda_3} \in H^{2l}(Z_{\lambda_3}; Q)$, 其中 $\lambda_1 \in I_1, \lambda_3 \in J_3$, 则

$\xi^k_{\lambda_1} \cup_{CR} \eta^l_{\lambda_3} = 0$.

引理3　对于 $\mu^*(\xi^k_{\lambda_2}) \in H^{2k}(Bl(X_{\lambda_2}); Q)$, $\mu_1^*(\eta^l_{\lambda'_2}) \in H^{2l}(Bl(X_{\lambda_2}); Q)$, 其中

$\lambda_2, \lambda'_2 \in I_2$, 且存在 $i, j > 0, \lambda_2^{q_i} = 1, (\lambda'_2)^{q_i} = 1$, 则 $\mu^*(\xi^k_{\lambda_2}) \cup_{CR} \mu_1^*(\eta^l_{\lambda'_2})$

$= \mu^*(\xi^k_{\lambda_2} \cup_{CR} \xi^l_{\lambda'_2}) \in H^*(Bl(X_{\lambda_2}); Q)$

引理4　对于 $\mu^*(\xi^k_{\lambda_2}) \in H^{2k}(Bl(X_{\lambda_2}); Q), \eta^l_{\lambda_2} \in H^{2l}(Z_{\lambda_3}; Q)$, 其中 $\lambda_2 \in I_2, \lambda_3 \in J_3$, 且存在 $i > 0, \lambda_2^{q_i} = 1$, 则 $\mu^*(\xi^k_{\lambda_2}) \cup_{CR} \eta^l_{\lambda_3} = 0$.

引理5　$\mu^*: H^*_{CR}(CP^n(A); Q)/H^*_{CR}(x; Q) \to H^*_{CR}(Bl(CP^n(A)); Q)$ 为环同态.

引理6　$j^*: H^*_{CR}(Bl(CP^n(A)); Q) \to H^*_{CR}(CP^{n-1}(q_1, \cdots, q_n); Q)$ 为环同态.

定理7　对于加权射影空间 $CP^n(A), A = (q_0, \cdots, q_n), x = [1, 0, \cdots, 0] \in CP^n(A)$.

设 $\mu: Bl(CP^n(A)) \to CP^n(A)$ 为 $CP^n(A)$ 在 x 处的加权 blowup. 则 $Bl(CP^n(A))$ 的陈－阮上同调为

$H^*_{CR}(Bl(CP^n(A)); Q) \cong H^*_{CR}(CP^n(A);$

$Q)/H_{CR}^{*}(x;Q)\oplus H_{CR}^{*}(CP^{n-1}(q_1,\cdots,q_n);Q)$.

其环结构如引理 1 ~ 6.

现在对例 1 的 $X = CP^3(6,4,3,2)$ 进行 blow up.

例 2 记 $Bl(X) = Bl(CP^3(6,4,3,2))$,则 I_1 保持不变,I_2 少了 λ_2,λ_8,

$J_3 = \{e^{\frac{1}{4}\times 2\pi i}, e^{\frac{3}{4}\times 2\pi i}\}$. 记为 $J_3 = \{\lambda_9,\lambda_{10}\}$. 因此 blow up 之后,$X_{\lambda_2},X_{\lambda_8}$ 消失了,$X_{\lambda_3},X_{\lambda_7}$ 保持不变,$X_{\lambda_1},X_{\lambda_4}X_{\lambda_5},X_{\lambda_6}$ 被 blow up,增加了 $X_{\lambda_9},X_{\lambda_{10}}$. 并且

$X_{\lambda_9}\cong X_{\lambda_{10}}\cong\{([z_0,z_1,z_2,z_3],[x_1,x_2,x_3])\in Bl(X)\mid z_1 = z_2 = z_3 = x_1 = x_3 = 0\}\cong\{*\}$.

对于 $\mu^*(\xi_1)\in H^*(Bl(X_{\lambda_1});Q)$,$\mu_1^*(\eta_5)\in H^*(Bl(X_{\lambda_5});Q)$

$\mu^*(\xi_1)\cup_{CR}\mu_1^*(\eta_5) = \mu^*(\xi_{\frac{2}{5}})\in H^*(Bl(X_{\lambda_5});Q)$;

对于 $\mu^*(\eta_1)\in H^*(Bl(X_{\lambda_1});Q)$,$\mu_1^*(\xi_5)\in H^*(Bl(X_{\lambda_5});Q)$,

$\mu^*(\eta_1)\cup_{CR}\mu_1^*(\xi_5) = \mu^*(\xi_{\frac{2}{5}})\in H^*(Bl(X_{\lambda_5});Q)$;

对于 $\mu_1^*(\xi_5)$,$\mu^*(\eta_5)\in H^*(Bl(X_{\lambda_5});Q)$,

$\mu^*(\eta_5)\cup_{CR}\mu_1^*(\xi_5) = \mu^*(\xi_{\frac{3}{1}})\in H^*(Bl(X_{\lambda_1});Q)$.

其中,$\mu^*(\xi_i)$,$\mu_1^*(\eta_i)$ 为 $H^*(Bl(X_{\lambda_i});Q)$ 的生成元,$i = 1,5$.

5 结论

对于加权射影空间 $CP^n(A)$,$A = (q_0,\cdots,q_n)$,和 $x = [1,0,\cdots,0]\in CP^n(A)$. 在 x 处对 $CP^n(A)$ 进行加权 blow up,$\mu:Bl(CP^n(A))\to CP^n(A)$. 在几何上来看,相当于从 $CP^n(A)$ 中把 x 挖掉,再补上低一维加权射影空间 $CP^{n-1}(q_1,\cdots,q_n)$,便得 blowup $Bl(CP^n(A))$. 而 $H_{CR}^*(Bl(CP^n(A));Q)$ 在群结构上来看,刚好是从 $H_{CR}^*(CP^n(A);Q)$ 模掉 $H_{CR}^*(x;Q)$,再直和上 $H_{CR}^*(CP^{n-1}(q_1,\cdots,q_n);Q)$. $H_{CR}^*(Bl(CP^n(A));Q)$ 的环结构稍微复杂一点,如引理 1 ~ 6 所示.

参考文献:

[1] Satake I. On a generalization of the notion of manifold. [J]. Proceedings of the National Academy of Science of the United States of America,1956,42(6):359 – 363.

[2] Satake I. The Gauss – Bonnet theorem of V – manifold [J]. Mathematical Society of Japan,1957, 9(4):464 – 492.

[3] Godinho L,Blowing up symplectic orbifolds[J]. Annals of Global Analysis and Geometry,2001, 20(2): 117 – 162.

[4] Adam A,Leida J, Ruan Y B. Orbifolds and stringy topology [M]. New York:Cambridge University Press,2007.

[5] Chen W ,Ruan Y. A new cohomology theory of orbifold [J]. Communications in Mathematical Physics, 2004, 248(1): 1 – 31.

[6] Jiang Y F. The Chen – Ruan cohomology of weighted projective spaces [J]. Canadian Journal Mathematics, 2007,59(5):981 – 1007.

[7] Chen B, Hu S. A deRham model for Chen – Ruan cohomology ring of abelian orbifolds, [J]. Mathematische Annalen,2006, 336(1):51 – 71.

[8] Ruan Y. Cohomology ring of crepant resolutions of orbifolds[C]// Gromov – Witten theory of spin curves and orbifolds. Providence: American Mathematical Society, 2006.

[9] Kawasaki T. Cohomology of twisted projective spaces and lens complexes[J]. Mathematische Annalen, 1973, 206(3): 243 – 248.

[10] 林奕武. $CP^n(Q)$ 的加权 blowup 及陈 – 阮上同调群[J]. 中山大学学报,2009,48(2):1 – 4.

[11] Griffiths P, Harris J, Principles of algebraic geometry [M]. New York:Wiley – Interscience,1994.