doi:10.13582/j.cnki.1672-9102.2014.02.025

反求空间有理二次三角 Bézier 曲线的参数和权因子

伏东奇,吴晓勤,彭叶辉

(湖南科技大学 数学与计算科学学院,湖南 湘潭 411201)

摘　要:有理二次三角 Bézier 曲线是近年来研究的一种新型曲线,证明了已知给定三维空间中不共面的 4 个控制顶点和它们凸包内的一点,可以唯一确定一条有理二次三角 Bézier 曲线,并且做了更进一步的研究,对有理二次三角 Bézier 曲线上一点的参数和它的 2 个内权因子这 3 个未知变量进行反求,从而得出原曲线的完整表达式. 同时提出了 2 种简单的方法,避免了数值计算的不稳定性. 最后给出了数值例子进行了验算,验算结果和实际基本吻合,具有很高的准确性.

关键词:有理二次三角 Bézier;空间曲线;权因子;参数

中图分类号:TP391　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-9102(2014)02-0121-03

Inversely solving the parameter and inner weight of rational quadratic trigonometric Bézier space curve

FU Dong-qi, WU Xiao-qin, PENG Ye-hui

(School of Mathematics & Computation Science, Hunan University of Science & Technology, Xiangtan 411201, China)

Abstract: The rational quadratic triangular Bézier is a new curve. Given four non-coplanar vertices and a point inside the convex hull of the vertices, a rational quadratic triangular Bézier curve was uniquely determined. The question to solve the parameter of the point on the curve and the inter weights was discussed, and two simple methods were proposed to avoid numerical instabilities. Finally, numerical examples were carried out checking, and the results were consistent with reality.

Key words: rational quadratic trigonometric polynomial Bézier ; space curve; weight; parameter

1991 年,STEP(产品模型数据交换标准)把 NURBS(非均匀有理 B 样条)作为定义产品形状的唯一数学方法[1]. NURBS 方法具有很多优良的性质[2],但是在展现了它强大的功能的同时,也暴露了一些不可避免的缺点,例如反求曲线曲面上点的参数值,存在数值不稳定问题[3]等. 由于 NURBS 的这些缺点,近年来许多人开始对三角多项式展开了研究,2003 年韩旭里[4]讨论了分段的二次三角多项式样条曲线,2008 年吴晓勤[5]提出了带形状参数的二次三角 Bézier 曲线,并且给出了许多优良的性质,2013 年徐迎博[6]进一步提出了该曲线的形状分析,但是都没有提到反算问题.

基于此,本文研究了给定控制顶点凸包内的一点,来反求经过该点的有理二次三角 Bézier 曲线的参数和 2 个内权因子 3 个未知量. 反算问题在曲线形状修改中具有重要的意义,很多人对其展开了研究,1995 年施法中[7]曾提出了反求有理二次 Bézier 曲线权因子和参数的方法,2002 年杨存典[8]研究

收稿日期:2013-07-18

基金项目:湖南科技大学研究生创新基金资助项目(S130031);湖南省自然科学基金资助项目(12JJA002);湖南省教育厅资助项目(12K106)

通信作者:吴晓勤(1968-),男,湖南怀化人,博士,副教授,主要从事计算机图形学,计算机辅助几何设计研究. E-mail:xqwu123@aliyun.com

了过控制多边形内任意 2 点的有理三次 Bézier 曲线权因子算法,2004 年,李亚利[9]研究了给定凸包内一点反算空间有理三次 Bézier 曲线的权因子和该点的参数. 由文献[5]可知,有理二次三角 Bézier 曲线和有理三次 Bézier 曲线[10]性质类似,但是具有更好的逼近性(如图 1),因而具有重要的研究价值,本文给出了 2 种简单有效的方法,回避了反求存在数值不稳定的问题.

1 有理二次三角 Bézier 曲线的定义

根据文献[5],设 $P_i(i=0,1,2,3)$ 为空间中的给定的一组控制顶点,定义曲线

$$p(t)=\sum_{i=0}^{3}P_iR_i(t)\ ,0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}. \tag{1}$$

为有理二次三角 Bézier 曲线,(如图 1),其中,基函数 $R_i(t)$ 定义为

$$\begin{cases}R_0(t)=\dfrac{(1-\sin t)^2}{\omega(t)};\\ R_1(t)=\dfrac{2\omega_1(1-\sin t)\sin t}{\omega(t)};\\ R_2(t)=\dfrac{2\omega_2(1-\cos t)\cos t}{\omega(t)};\\ R_3(t)=\dfrac{(1-\cos t)^2}{\omega(t)}.\end{cases}$$

式中, $\omega(t)=(1-\sin t)^2+2\omega_1(1-\sin t)\sin t+2\omega_2(1-\cos t)\cos t+(1-\cos t)^2$,ω_1,ω_2 为 P_1,P_2 的权因子.

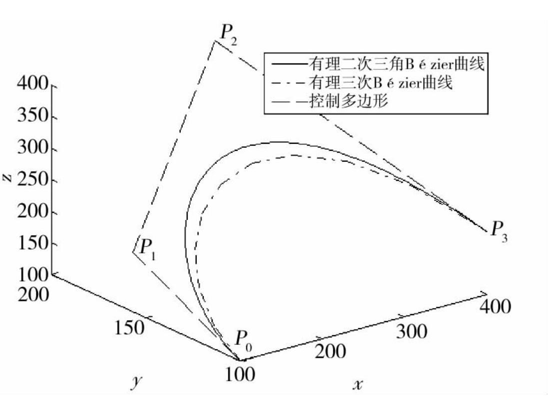

图 1 有理二次三角 Bézier 曲线($\omega_1=\omega_2=0.207\ 1$)

由曲线定义可知,曲线只有 ω_1,ω_2 和 t 3 个未知量,而在三维空间中每个点有 3 个坐标值,因而知道曲线上一点就能求出这 3 个未知量,代入 ω_1,ω_2 就能完全确定该曲线表达式,改变参数 t 就能得到曲线上任意一点,关键是该曲线较复杂,而且含有三角函数,直接反求计算量巨大,而且存在数值不稳定性的问题,下面给出 2 种较简单的方法.

2 求参数和权因子

如图 1,已知控制顶点 P_0,P_1,P_2,P_3 及其凸包内一点 s,点 s 的关于 P_0,P_1,P_2,P_3 的重心坐标为 $(\gamma,\alpha,\beta,1-\alpha-\beta-\gamma)$. 于是有

$$s=p(t)=\gamma P_0+\alpha P_1+\beta P_2+(1-\alpha-\beta-\gamma)P_3,0\leqslant\alpha,\beta,\alpha+\beta+\gamma\leqslant 1. \tag{2}$$

式(2)对比式(1)有

$$\begin{cases}\gamma=\dfrac{(1-\sin t)^2}{\omega(t)};\\ \alpha=\dfrac{2((1-\sin t)\sin t)\omega_1}{\omega(t)};\\ \beta=\dfrac{2((1-\cos t)\cos t)\omega_2}{\omega(t)};\\ 1-\alpha-\beta-\gamma=\dfrac{(1-\cos t)^2}{\omega(t)}.\end{cases} \tag{3}$$

由式(3)首尾两式相除得

$$\frac{(1-\cos t)^2}{(1-\sin t)^2}=\frac{1-\alpha-\beta-\gamma}{\gamma}=\mu. \tag{4}$$

解得

$$t=\arcsin\frac{\sqrt{\mu}-1}{\sqrt{\mu+1}}+\arcsin\frac{1}{\sqrt{\mu+1}}. \tag{5}$$

式(5)表明参数 t 和首末控制顶点的重心坐标分量 $\gamma,1-\alpha-\beta-\gamma$ 有关,和中间控制顶点的重心坐标分量 α,β 以及内权因子无关.

又由式(3)中间两式得

$$\begin{cases}\omega_1=\dfrac{1-\sin t}{2\sin t}\dfrac{\alpha}{\gamma};\\ \omega_2=\dfrac{1-\cos t}{2\cos t}\dfrac{\beta}{1-\alpha-\beta-\gamma}.\end{cases} \tag{6}$$

式(6)表明权因子和参数 t 有关,并且权因子 ω_1 和首端 2 个控制顶点的重心坐标分量有关,ω_2 和末端 2 个控制顶点的重心坐标分量有关.

3 α,β,γ 的另一几何意义和求权因子的另一方法

如图 2,以 P_1,P_2,s 三点做平面交 P_0P_3 于点 m,可知曲线经过平面 mP_1P_2 时的参数值均相等. 根据式(4)有

$$\frac{P_0m}{mP_3}=\frac{(1-\cos t)^2}{(1-\sin t)^2}=\mu=\frac{1-\alpha-\beta-\gamma}{\gamma}$$

故 $\gamma=\dfrac{(1-\alpha-\beta)}{1+\mu}$,则式(2)化为

$$s=\alpha P_1+\beta P_2+(1-\alpha-\beta)\frac{P_0+\mu P_3}{\mu+1}=\alpha P_1+\beta P_2+(1-\alpha-\beta)m$$

所以由上述推导可知,(表示点 m 分线段 P_0P_3

的长度之比,并且(唯一决定参数值. $\alpha,\beta,1-\alpha-\beta$ 表示点 s 关于 P_1,P_2,m 的重心坐标分量,即对应三角形的面积,如图 2 所示.

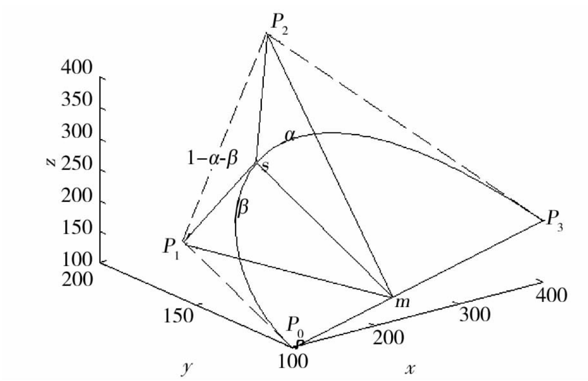

图 2　α,β,μ 几何意义示意图

在此几何意义下,可以推导出权因子的另一解法,

取式(3)中间两式可解得

$$\begin{cases}\omega_1 = \dfrac{2\sin t+2\cos t-3}{2(\sin t-1)\sin t}\dfrac{\alpha}{1-\alpha-\beta};\\ \omega_2 = \dfrac{2\sin t+2\cos t-3}{2(\cos t-1)\cos t}\dfrac{\beta}{1-\alpha-\beta}.\end{cases}\tag{7}$$

由于通过式(5)求得了 t,所以通过式(7)也可以解出 ω_1,ω_2,此方法较第 1 种方法稍显复杂,而且可以由第 1 种方法推导而来,但是具有更强的几何意义,因而更加方便于研究曲线的形状分析和修改. 可以保持参数不变,通过改变 α,β 来调节 2 个内权因子得到新权因子使得曲线经过该平面的其他点,从而达到曲线的形状修改.

如果取的 s 点刚好位于 P_0P_3 的中点与 P_1,P_2 的平面内,即当 m 点是 P_0P_3 的中点时,则 s 点是曲线的肩点.

即 $\mu=1$, 由式(5)得 $t=\dfrac{\pi}{4}$, 由式(7)得

$$\begin{cases}\omega_1 = \dfrac{(\sqrt{2}-1)\alpha}{1-\alpha-\beta};\\ \omega_2 = \dfrac{(\sqrt{2}-1)\beta}{1-\alpha-\beta}.\end{cases}\tag{8}$$

式(8)即已知肩点坐标时求权因子 ω_1,ω_2 的表达式.

4　实例计算

已知空间中一条有理二次三角 Bézier 曲线,其控制顶点为 $P_0(100,100,100)$,$P_1(200,200,100)$,$P_2(300,200,400)$,$P_3(400,100,200)$,曲线经过点 $s(234,164,256)$. 求点 s 参数 t 和 2 个内权因子 ω_1,ω_2.

由式(2)及式(4)解得

$$\alpha=\frac{57}{400},\beta=\frac{199}{400},\gamma=\frac{117}{400},\mu=\frac{3}{13}.$$

所以根据式(5)得

$t=0.635\ 5$

通过 2 种方法由式(6)和式(7)求得的权因子均为

$\omega_1=0.166\ 8,\omega_2=0.894\ 0$

再将 t,ω_1,ω_2 代入原曲线式(1)得

$P(t)=(234.00,164.00,255.99)$

符合事实,验证了该算法的准确性.

通过以上方法,对于符合要求给定的任意点 s,都可以快速求出 t,ω_1,ω_2,并且求出的值避免了数值不稳定性,以上实例都说明了此方法的简单性和准确性.

5　结论

在空间中,有理二次三角 Bézier 曲线的反算问题有唯一解,但是由于解三角函数方程组过于复杂,使得计算量过于庞大,而且存在数值不稳定问题. 通过本文的计算方法,计算快速简单,同时也避开了反算存在数值不稳定的问题. 其中,第 2 种方法是第 1 种方法的一个推导形式,不过该方法表明了,固定参数后,2 个内权因子由中间控制顶点的重心坐标唯一确定,因此可以基于此进一步进行曲线的形状修改研究. 最后给出了已知肩点时的反求算法以及给出了具体实例,对该算法进行了验算,验证了本文方法的正确性.

参考文献:

[1] Vergeest S M. CAD surface data exchange using STEP[J]. Computer - Aided Design ,1991,23(4):270 - 280.

[2] Piegl L, Tiller. The NURBS book[M]. 2rd ed. Berlin: Springer,1997.

[3] 施法中. 计算机辅助几何设计与非均匀有理 B 样条[M]. 北京:高等教育出版社,1994.

[4] Han X L. Piecewise quadratic trigonometric polynomial curves[J]. Mathematics of Computation,2003,72(243):1369 - 1377.

[5] 吴晓勤,韩旭里,罗善明. 带形状参数的二次三角 Bézier 曲线[J]. 工程图学学报,2008(1):82 - 87.

[6] 徐迎博,喻德生. 带形状参数的二次三角 Bézier 曲线形状分析[J]. 浙江大学学报,2013,40(1):35 - 41.

[7] 施法中. 反求标准型有理二次 Bézier 曲线的参数与内权因子[J]. 计算机辅助设计与图形学学报,1995,7(2):91 - 95.

[8] 杨存典,杨闻起. 过控制多边形内任意两点的三次有理 Bézier 曲线权因子的算法[J]. 商洛师范专科学校学报,2002,16(1):65 - 66.

[9] 李亚利,秦新强,童小红. 有理三次 Bezier 曲线的参数化研究[J]. 纺织高校基础科学学报,2004,17(4):331 - 333.

[10] 韩旭里,肖鸣宇. 三次有理 Bézier 曲线的形状调整方法[J]. 计算机工程与应用,2005(15):70 - 72.