

# 基于 Weibull 统计分布的岩石损伤模型

张慧梅<sup>1</sup>, 雷利娜<sup>1,2</sup>, 杨更社<sup>3</sup>

(1. 西安科技大学 理学院, 陕西 西安 710054; 2. 安世亚太科技股份有限公司, 北京 100026;

3. 西安科技大学 建筑与土木工程学院, 陕西 西安 710054)

**摘要:** 基于岩石内部裂隙和孔隙分布的随机性, 运用连续损伤力学理论, 建立了围压与轴压共同作用下岩石的统计损伤模型; 结合岩石应力应变曲线的特征参量确定了模型参数, 增强了模型的适应性; 探讨了岩石损伤的演化性态及其宏观表现, 并通过试验对模型进行了验证. 结果表明: 岩石的宏观力学特性取决于内部微裂纹的细观力学响应, 其损伤演化途径反映了岩石变形破坏的全过程; 模型理论曲线与试验实测曲线具有较高的吻合度, 验证了模型的合理性.

**关键词:** 岩石; 损伤演化; 本构方程; 模型参数

**中图分类号:** TU452

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1672-9102(2014)03-0029-04

## Research on rock statistical damage model and determination of parameters

ZHANG Huimei<sup>1</sup>, LEI Lina<sup>1,2</sup>, YANG Gengshe<sup>3</sup>

(1. Department of Mechanics, Xi'an University of Science and Technology, Xi'an 710054, China;

2. Peral Global Technologies Inc, Beijing 100026, China;

3. College of Architecture and Civil Engineering, Xi'an University of Science and Technology, Xi'an 710054, China)

**Abstract:** Firstly, using the continuum damage mechanics theory, the statistical damage constitutive model of rocks under the interaction of confining pressure and axial compression was established based on the randomness of the rock internal cracks and pore distribution. Secondly, the method for determining the model parameters was established by combing the characteristic parameters of rock stress-strain curve, which enhanced the adaptability of the model. Finally, the evolutionary path of the rock damage and its macroeconomic performance were investigated, and the model was verified by the test. The results show that the macro-mechanical properties of the rock depend on micromechanics response of the internal micro-cracks, its damage evolution approach reflects the whole process of rock deformation and failure. In addition the theoretical curve of model and the experimental measured curve has a high degree of matching which verify the rationality of the model.

**Key words:** rock; damage evolution; constitutive equation; model parameter

岩石是由多种矿物晶粒及胶结物组成的混杂物, 内含大量随机分布的微观缺陷, 由于外界荷载和环境的长期作用, 微缺陷会不断扩展, 岩石产生

变形破坏. 损伤力学正是研究材料从原生缺陷到形成宏观裂纹直至破坏的全过程<sup>[1]</sup>, 建立岩石损伤过程中的本构关系是损伤力学的核心<sup>[2]</sup>. 目前对

收稿日期: 2013-09-20

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11172232, 41272340); 陕西省自然科学基金资助项目(2011JM1003); 教育部新世纪人才支持计划项目(ACET-12-1044); 陕西省教育厅专项基金项目(11JK0525, 11JK0542)

通信作者: 张慧梅(1968-), 女, 山西大同人, 博士, 教授, 博士生导师, 主要从事力学与岩土工程方面的教学与研究工作. E-mail: zhanghuimei68@163.com

损伤本构模型的研究,大多考虑荷载作用下岩石微元破坏的随机性,用宏观唯象学方法建立<sup>[3-5]</sup>,其关键是如何选取反映岩石损伤程度的变量、岩石内部损伤随机分布的形式以及模型参数的确定<sup>[6-8]</sup>.

本文基于微元体强度服从 Weibull 分布特性,确立了损伤与应力-应变状态变量的关系;考虑围压对模型参数的影响,推导出能反映应力应变特征的合理参数,进而建立岩石损伤本构模型,并通过试验结果对其验证.

## 1 岩石损伤扩展本构模型

### 1.1 岩石损伤本构关系

自然界中的岩石是一种含有原始损伤和缺陷的非均质材料,其宏观破坏现象是由许多微细观破坏的叠加所导致的.当岩石中的基元体在持续的荷载作用下,损伤是不断累积的,因此用统计的方法来描述基元体的力学性质.

设岩石微元的破坏概率随岩石微元强度  $F = f(\sigma^*)$  的分布密度为  $P[f(\sigma^*)]$ ,那么损伤变量与微元破坏的概率密度存在如下关系:

$$D = \int_0^{f(\sigma^*)} P[f(\sigma^*)] dx. \quad (1)$$

式(1)显示,建立岩石变形破坏全过程损伤本构模型的关键之一在于岩石微元强度与破坏概率的确定.

采用 Weibull 分布函数描述岩石强度的随机统计分布规律<sup>[9]</sup>,则岩石微元破坏的概率密度函数为

$$P[F] = \frac{n}{F_0} \cdot \left(\frac{F}{F_0}\right)^{n-1} \cdot e^{-\left(\frac{F}{F_0}\right)^n}. \quad (2)$$

式中, $n, F_0$  为 Weibull 分布参数.

岩石类材料在载荷作用下的力学响应和损伤演化规律与材料的损伤变量密切相关.岩石的破裂过程是不断损伤的连续过程,将式(2)代入式(1),积分后得到损伤变量  $D$  与表征体元的强度概率有如下关系

$$D = 1 - e^{-\left(\frac{F}{F_0}\right)^n}. \quad (3)$$

损伤对应变行为的影响可通过有效应力来体现,利用 J. Lemaitre 应变等价原理,可以建立岩石损伤本构关系<sup>[10]</sup>:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^* (1 - D) = \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon} (1 - D). \quad (4)$$

式中, $\boldsymbol{\sigma}$  和  $\boldsymbol{\sigma}^*$  为名义应力矩阵和有效应力矩阵; $\mathbf{E}$  为弹性矩阵; $\boldsymbol{\varepsilon}$  为应变矩阵.

在等围压三轴压缩条件下,将式(3)代入式(4)可得岩石损伤统计本构关系为

$$\begin{cases} \sigma_1 = E_0 \varepsilon_1 \exp\left[-\left(\frac{F}{F_0}\right)^n\right] + 2\mu\sigma_3; \\ \sigma_3 = E_0 \varepsilon_3 \exp\left[-\left(\frac{F}{F_0}\right)^n\right] / (1 - \mu) + \mu\sigma_1 / (1 - \mu). \end{cases} \quad (5)$$

建立上述损伤本构关系的关键在于 Weibull 分布参数  $n$  及  $F_0$  的确定.如果能够将模型参数与岩石宏观力学参量联系起来,而不是根据岩石试验曲线拟合而来,这样的模型才具有适应性.因此,结合岩石应力应变曲线确定模型参数的方法更具有普遍意义.图1所示为典型的岩石三轴试验曲线,在极值点处满足以下几何条件:1)  $\varepsilon = \varepsilon_f, \sigma = \sigma_f$ ;

2)  $\varepsilon = \varepsilon_f, \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = 0$ .

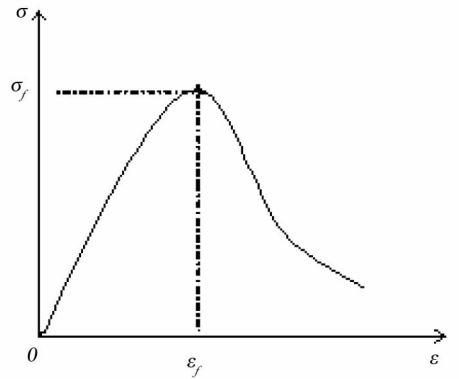


图1 岩石应力应变曲线

式中, $\varepsilon_f$  为曲线峰值点对应的应变值, $\sigma_f$  为曲线峰值点对应的应力值.

将几何条件(1)代入式(5)中的第一式,得

$$\sigma_f = E_0 \varepsilon_f \exp\left[-\left(\frac{F_f}{F_0}\right)^n\right] + 2\mu\sigma_3. \quad (6)$$

变换上式可得到

$$\exp\left[-\left(\frac{F_f}{F_0}\right)^n\right] = (\sigma_f - 2\mu\sigma_3) / E_0 \varepsilon_f. \quad (7)$$

由于  $\sigma_1, \sigma_3$  为  $\varepsilon_1, \varepsilon_3$  的函数,则存在如下全微分形式:

$$d\sigma_1 = \frac{\partial \sigma_1}{\partial \varepsilon_1} d\varepsilon_1 + \frac{\partial \sigma_1}{\partial \varepsilon_3} d\varepsilon_3. \quad (8)$$

对式(5)两边取微分,则有

$$\begin{cases} d\sigma_1 = \frac{\partial \sigma_1}{\partial \varepsilon_1} d\varepsilon_1 + \frac{\partial \sigma_1}{\partial F} dF + \frac{\partial \sigma_1}{\partial n} dn + \frac{\partial \sigma_1}{\partial F_0} dF_0 + 2\mu d\sigma_3; \\ d\sigma_3 = \frac{\partial \sigma_3}{\partial \varepsilon_3} d\varepsilon_3 + \frac{\partial \sigma_3}{\partial F} dF + \frac{\partial \sigma_3}{\partial n} dn + \frac{\partial \sigma_3}{\partial F_0} dF_0 + \mu/(1 - \mu) d\sigma_1. \end{cases} \quad (9)$$

由广义虎克定理及 Vonmises 屈服准则<sup>[11]</sup>,可推导得式(9)中第一式中有

$$F = \varepsilon_1 - \frac{(1 - 2\mu)\sigma_3}{E}, dF = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_1} d\varepsilon_1 + \frac{\partial F}{\partial \sigma_3} d\sigma_3. \quad (10)$$

式(9)中第二式为

$$F = -\frac{\varepsilon_3}{\mu} + \frac{(1-2\mu)\sigma_3}{\mu E_0}, dF = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_3} d\varepsilon_3 + \frac{\partial F}{\partial \sigma_3} d\sigma_3, \quad (11)$$

设  $n, F_0$  仅为围压的函数,则有

$$dn = n_3 d\sigma_3, dF_0 = F_3 d\sigma_3, \quad (12)$$

将式(10)、式(11)、式(12)代入式(9),消去  $d\sigma_3$ ,再结合式(8)和几何条件(2),则有

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial \varepsilon_1} + \frac{\partial \sigma_1}{\partial F} \times \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_1} = 0. \quad (13)$$

式中,

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial \varepsilon_1} = E_0 \exp[-(\frac{F}{F_0})^n]; \frac{\partial \sigma_1}{\partial F} = -E_0 \varepsilon_1 \exp[-(\frac{F}{F_0})^n] (\frac{F}{F_0})^n \times n/F; \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_1} = 1.$$

解式(13)可得  $n, F_0$  的关系式为

$$\left(\frac{F}{F_0}\right)^n = \frac{\varepsilon_f - (1-2\mu)\sigma_3/E_0}{n \times \varepsilon_f}. \quad (14)$$

结合式(14)和式(7)推导可得:

$$F_0 = [\varepsilon_f - (1-2\mu)\sigma_3/E_0] \times \left[\frac{n\varepsilon_f}{\varepsilon_f - (1-2\mu)\sigma_3/E_0}\right]^{1/n}. \quad (15)$$

### 1.2 岩石损伤演化方程

宏观唯象损伤力学表明,岩石宏观力学性能 的响应能够代表其内部的劣化程度.在载荷作用下,岩石中会产生大量的细观裂纹,同时部分原生裂纹不断地发育,并呈现持续扩展的趋势,在此过程中岩石的损伤不断累积.

将式(14)、式(15)代入式(3)得岩石损伤演化方程为

$$D = 1 - \exp\left\{\left[\frac{\varepsilon_1 - (1-2\mu)\sigma_3/E_0}{\varepsilon_f - (1-2\mu)\sigma_3/E_0}\right]^n \ln \frac{\sigma_f - 2\mu\sigma_3}{E\varepsilon_f}\right\} \quad (16)$$

式(16)表明,由于材料的损伤是引起材料微结构和宏观力学性能变化的原因,因此,从细观角度选择度量损伤的基准,可以通过损伤演化途径来反映岩石的宏观力学性能.

结合式(7)分析可得,式(16)中  $D$  的取值范围为  $[0, 1]$ .当岩石微元未产生损伤时,损伤变量值  $D$  为 0;当岩石完全损伤时,损伤变量  $D$  达到 1.随着应变和围压的增加,岩石的损伤不断变化,并呈现出明显的非线性特性.损伤变量  $D$  在岩石变形破坏的不同阶段(压密阶段、弹性增长阶段、塑性屈服阶段以及破坏阶段)表现出不同的损伤形态.而岩石弹性模量、泊松比、极限强度、应变峰值决定了损伤变量的大小,只要获取了式中的参数,就可以得到相应岩石的损伤演化曲线,从而结合损伤演化途径对岩石的宏观力学特性进行分析.而这些参数均可通过岩石常规力学特性试验获取.

## 2 计算实例与损伤扩展特性分析

为了验证本文所建立的岩石损伤模型,特针对 陕西红砂岩,进行了不同围压条件下的力学特性试 验,所得岩石力学参数如表 1 所示.利用表 1 中的 实测参数,再由式(16)及式(14)、式(15)计算得到 红砂岩的损伤演化曲线如图 2 所示.

表 1 红砂岩试验参数

围压/MPa	极值应力/MPa	极值应变/%	$E$ /GPa
0	4.23	0.418	1.16
2	14.57	1.096	1.30
4	19.65	1.280	1.52
6	24.87	1.608	1.56

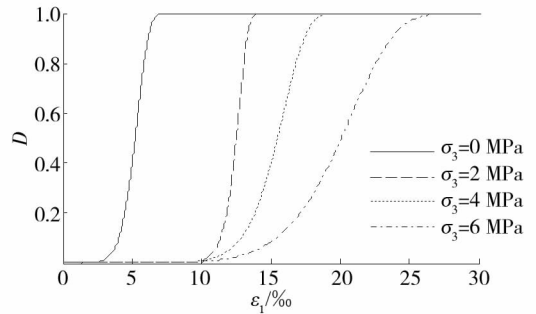


图 2 红砂岩的损伤演化曲线

从图 2 可以看出:红砂岩在不同围压下的损伤 随着轴向应变变化的趋势相似,在变形的初始阶段 单调递增最后趋于平缓,其演化过程可以划分为 4 个阶段:

- 1) 损伤弱化阶段:由于红砂岩内部所含的孔隙在围压的作用下发生了闭合,使得岩石损伤弱化.
- 2) 线性损伤阶段:这一阶段的曲线基本上呈直线状态,随着应变的增加,岩石损伤也成比例累积,损伤稳定扩展.
- 3) 非稳定损伤发展阶段:随着应变的持续增加,岩石内部的微裂纹不断萌生、聚集、搭接贯通,使得破裂不断发展.
- 4) 损伤破坏阶段:当岩石的承载力达到峰值强度后,裂隙快速发展,交叉且相互联合形成断裂面,损伤变量趋于 1.

红砂岩损伤的 4 个阶段表明,围压一定时,红砂岩的损伤随着轴向应变的增加而增大,岩石损伤逐渐积累;当红砂岩进入非稳定损伤发展阶段时,岩石的微破裂出现了质的变化,微裂纹持续扩展.

从图中还可以看出,随着围压的升高,红砂岩的损伤劣化程度在变小,说明围压抑制了损伤的扩

展,改善了红砂岩的受力状态,伴随着岩石宏观平均强度的增大;随着围压的增加,损伤随应变累积发展的趋势变缓,表现为图中红砂岩损伤变量达到1时所对应的轴向应变不断增大,说明红砂岩脆性在减弱,延性在增强。

图3是利用表1的实测参数,由式(5)及式(14)、式(15)计算得到的损伤本构模型曲线,并和红砂岩的试验曲线进行对比。

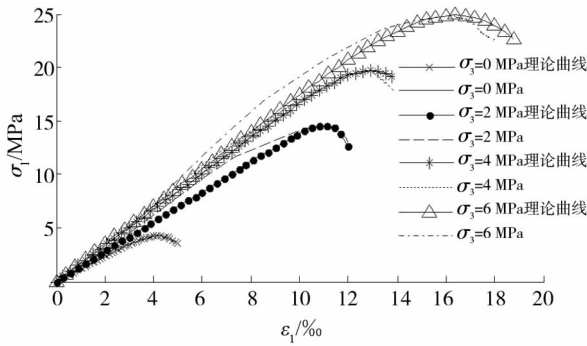


图3 红砂岩试验曲线与理论曲线的比较

由图3可以看出,本文所建立的损伤本构模型理论曲线与试验曲线比较接近,验证了模型的合理性。

图3显示,红砂岩在不同围压下的变形破坏曲线经历了4个变形阶段:随着应变的增加,在受载初期,孔隙裂隙被压密;进入弹性变形至微弹性裂隙稳定发展阶段后,承载应力呈比例增加;之后岩石进入非稳定破坏阶段,明显的表现出应变速率增大的现象;到了破裂后阶段,随着应变的增加,承载能力降低。

随着围压的增大,曲线斜率增大,应力峰值点增高,峰值点所对应的轴向变形也增大,且应力-应变曲线形态发生了改变,表明岩石的弹性极限增大,抗压强度增强,力学特性发生了改变,即脆性减弱,延性增强。岩石损伤微观上表现为结合键发生交叉与破坏,细观上表现为原始微裂纹扩展贯通与微孔洞的增长,岩石宏观力学特性取决于内部微裂纹的细观力学响应。

### 3 结论

由于岩石内部自身构造的不均匀性,在荷载的作用下,不可避免地存在各微元强度不一致的问题。因此研究岩石类固体的损伤演化及宏观力学特性就显得尤为重要。

1)利用连续损伤力学理论,在应变等价原理的基础上,建立了反映岩石损伤演化途径的损伤统计本构模型,该模型参数是基于岩石破裂全过程应

力应变曲线特征参量推导的,因此模型的适应性较好。

2)损伤演化模型充分反映了岩石损伤演化形态受到应变以及材料所处应力状态的影响。随着围压的增加,红砂岩的损伤变量减小,损伤累积趋势变缓,同时达到最大损伤时的轴向应变变大,宏观上表现为平均强度增大,脆性减小,延性增强,显然与实际吻合。

3)所建立的本构模型对实测红砂岩应力-应变曲线过程吻合精度较高,能通过红砂岩细观的损伤演化形态反映宏观的力学行为,揭示了岩石内部微裂纹的闭合、萌生、发展及出现宏观断裂的全过程。

### 参考文献:

- [1] 张雪颖, 阮怀宁, 贾彩虹. 岩石损伤力学理论研究进展[J]. 四川建筑科学研究, 2010, 36(2): 134 - 138.
- [2] 杨圣奇, 徐卫亚, 韦立德, 等. 单轴压缩下岩石损伤本构模型与试验研究[J]. 河海大学学报(自然科学版), 2004, 32(2): 200 - 203.
- [3] Zhao Y S, Wan Z J, Feng Z J, et al. Triaxial compression system for rock testing under high temperature and high pressure[J]. International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences, 2012 (52): 132 - 138.
- [4] 陈剑文, 杨春和, 高小平, 等. 盐岩温度与应力耦合损伤研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2005, 24(11): 1986 - 1991.
- [5] 张慧梅, 杨更社. 冻融与荷载耦合作用下岩石损伤模型的研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2010, 29(3): 471 - 476.
- [6] 曹文贵, 赵明华, 唐学军. 岩石破裂过程的统计损伤模拟研究[J]. 岩土工程学报, 2003, 25(2): 184 - 187.
- [7] 李树春, 许江. 李克钢. 基于初始损伤系数修正的岩石损伤统计本构模型[J]. 四川大学学报(工程科学版), 2007, 39(6): 41 - 44.
- [8] 刘军忠, 徐金余, 吕晓聪, 等. 围压下岩石的冲击力学行为及动态统计损伤本构模型研究[J]. 工程力学, 2012, 29(1): 55 - 63.
- [9] 李杭州, 廖红军, 盛谦. 基于统一强度理论的软岩损伤统计本构模型研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2006 (7): 1131 - 1136.
- [10] Aitre J. A continuous damage mechanics model for ductile fracture[J]. Journal of Engineering Materials and Technology, 1985, 107(1): 83 - 89.
- [11] 谢和平, 陈忠辉. 岩石力学[M]. 北京: 科学出版社, 2004.