

分数阶 $Lü$ 混沌系统的同步控制新方法研究

谭文, 罗健, 吕明阳, 陈敏

(湖南科技大学 信息与电气工程学院, 湖南 湘潭 411201)

摘要:应用分数阶系统稳定性理论, 针对 $Lü$ 分数阶混沌系统, 设计了一种同步控制新方法. 仅在分数阶混沌响应系统中添加一个控制器, 便可使该系统之间达成有效同步. 为了提高通信系统的保密性, 实现复杂的非周期信息的安全传输, 基于混沌模拟通信技术, 将该方案应用到混沌掩盖保密通信中. 在接收端利用同步后的混沌信号进行去掩盖, 从而恢复出有用信息. 同时给出了理论分析与数值仿真结果.

关键词:分数阶混沌系统; 混沌同步; 保密通信; $Lü$ 混沌系统; 分数阶微分; 渐近稳定

中图分类号:TP13 **文献标志码:**A **文章编号:**1672-9102(2014)03-0059-05

A novel synchronization controller for fractional order $Lü$ chaotic system

TAN Wen, LUO Jian, LV Mingyang, CHEN Min

(School of Information and Electrical Engineering, Hunan University of Science and Technology, Xiangtan 411201, China)

Abstract: A new controller design method was proposed to synchronize a class of fractional-order chaotic system through the stability theory of fractional calculus. In order to make effective synchronization between two fractional order systems, one suitable controller need to be added to the system only. In order to improve the system of communication security and the implementation of the secure transmission of complex aperiodic information, the scheme was applied to chaos masking secure communication based on chaotic communication technology. The useful information was properly recovered at the receiver through chaos unmasking. Finally, numerical simulations as well as the theoretical analysis were provided.

Key words: fractional order chaotic system; chaos synchronization; secure communication; $Lü$ chaotic system; fractional calculus; asymptotical stability

混沌同步的概念与方法由 Pecora 和 Carroll 提出之后^[1], 众多学者展开了对混沌的深入研究, 并提出了不同类型的同步控制策略^[2-6], 发现在分数阶系统同样存在混沌与超混沌现象. 因为分数阶系统更具普遍性和更大的密钥空间, 所以, 分数阶混沌系统的同步控制有很好的应用前景. 文献[2-3]采用滑模主动控制方法实现混沌同步, 文献[4]

研究了一个超混沌系统特性, 发现阶数为 2.88 时便出现混沌现象. Arman 利用卡尔曼滤波器对分数阶混沌系统的同步通讯特性做了分析^[5]; DENG 将分数阶同步控制应用于多媒体保密通讯^[6]. 虽然上述方法能够实现混沌系统之间的同步, 但是需要设计至少 2 个控制器, 导致系统更加复杂, 使用成本提高. 另据文献分析发现, 在保密通信中研究简

收稿日期: 2014-03-07

基金项目: 国家自然科学基金重点资助项目(60835004); 湖南省自然科学基金资助项目(09JJ3117, 14JJ3107, 14JJ3108); 江苏省自然科学基金资助项目(BK2009727); 教育部重点项目(211118); 湖南省科技计划项目(2013TZ2017, 2013FJ3156, 2013GK3090, B11125); 湖南科技大学研究生创新基金项目(S130022)

通信作者: 谭文(1968-), 男, 湖南益阳人, 博士, 教授, 主要从事智能控制与应用、非线性混沌系统机理及其控制研究. E-mail: 1549760311@qq.com

单周期信号较多,而复杂的非周期信号相对较少.在信号传输过程,利用混沌信号作载体来隐藏需要传送的简单周期信号,保密性低.实际通讯中,待发射的信号随机性强,因此开展复杂非周期信号在混沌保密通信中的研究具有较好的理论意义与实际应用价值^[7-10].

为此,本文首先针对 $L\ddot{u}$ 分数阶混沌系统,仅在对应的响应系统中添加单个控制输入,便可实现状态同步,极大地节省了控制成本.随后,基于混沌隐藏技术,对混沌保密通信方式进行了研究.

1 分数阶微分描述及其逼近特性

目前分数阶微分定义有几种,本文利用经典的 Caputo 定义^[11]:

$$D_*^\alpha x(t) = J^{n-\alpha} x^{(n)}(t), \alpha > 0. \quad (1)$$

式中, n 为首个不小于 α 的整数, J^β 是 β 阶 Riemann - Liouville 积分算子,表述如下:

$$J^\beta y(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t \frac{y(\tau)}{(t-\tau)^{1-\beta}} d\tau. \quad (2)$$

式中, $\Gamma(\cdot)$ 为伽马函数, $0 < \beta \leq 1$.

若设所研究的分数阶系统为

$$\frac{d^q X_1}{dt^q} = F(X_1). \quad (3)$$

式中, $X_1 \in R^{n \times 1}$, $F(X_1) = (f_1(X_1), f_2(X_1), \dots, f_n(X_1))^T$, 同时 $q \in (0, 1]$. 设系统(3)为零,即

$$F(X_1) = 0. \quad (4)$$

则对应的响应系统为

$$\frac{d^q X_2}{dt^q} = F(X_2) + u(t). \quad (5)$$

式中, $X_2 \in R^{n \times 1}$, $u(t)$ 为控制输入信号.

若系统(3)与系统(4)之间的误差为 $e(t) = X_1(t) - X_2(t)$, 则误差系统表达式为

$$\frac{d^q e}{dt^q} = F(X_1) - F(X_2) - u(t). \quad (6)$$

Maignon 研究了分数阶系统稳定的充分必要条件^[12]. 其问题本质是将系统同步变换成误差系统的稳定性分析. 为便于后续分析,先给出相关稳定性的定理.

引理1 系统(3)渐近稳定,当且仅当对任意特征值 λ , 均满足

$$|\arg(\lambda)| > q\pi/2. \quad (7)$$

那么, $q > 2\arctan(|\frac{\text{Im}(\lambda)}{\text{Re}(\lambda)}|)/\pi$ 时,系统(3)存在混沌现象. 阶次为 q 的分数阶系统,其稳定区域见

图1. 明显地,对于系统状态变量,当特征值 λ 使 $|\arg(\lambda)| > q\pi/2$, 那么系统(3)便渐近稳定. 不难发现,分数阶混沌系统与对应的整数阶混沌系统

$$\dot{X}_1 = F(X_1). \quad (8)$$

比较,其稳定区间要大.

推论1 若整数阶混沌系统是稳定的,那么其对应的分数阶混沌系统渐近稳定.

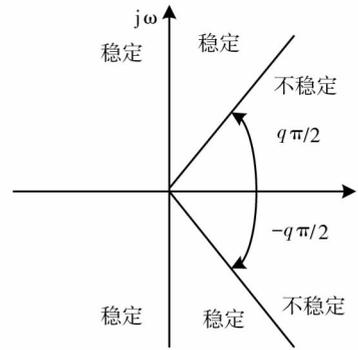


图1 分数阶系统的稳定区域

2 分数阶 $L\ddot{u}$ 混沌系统描述

分数阶 $L\ddot{u}$ 混沌系统可表述如下:

$$\begin{cases} \frac{d^\alpha x_1}{dt^\alpha} = a(y_1 - x_1); \\ \frac{d^\alpha y_1}{dt^\alpha} = -x_1 z_1 + b y_1; \\ \frac{d^\alpha z_1}{dt^\alpha} = x_1 y_1 - c z_1. \end{cases} \quad (9)$$

式中, $a = 35, b = 28, c = 3$; 若系统(9)右边均为零, 则计算出系统的3个平衡点为 $S_0 = (0, 0, 0)$, $S_1 = (9.1652, 9.1652, 28)$, $S_2 = (-9.1652, -9.1652, 28)$.

对应的雅克比矩阵为

$$J = \begin{pmatrix} -35 & 35 & 0 \\ -z & 28 & -x \\ y & x & -3 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

上述平衡点对应特征值如下, S_0 处: $\lambda_1 = 35$, $\lambda_2 = -28$, $\lambda_3 = 3$; S_1 处: $\lambda_1 = -19.7536$, $\lambda_2 = 4.8768 + 16.5495i$, $\lambda_3 = 4.8768 - 16.5495i$; S_2 处: $\lambda_1 = -19.7536$, $\lambda_2 = 4.8768 + 16.5495i$, $\lambda_3 = 4.8768 - 16.5495i$. 根据引理1得知,若 $\alpha > 2\arctan(16.5495/4.8768)/\pi \approx 0.82$, 也即 $0.82 < \alpha < 1$ 时,分数阶 $L\ddot{u}$ 混沌系统存在混沌现象. 图2呈现了 $\alpha = 0.9$ 时混沌吸引子相图,很清楚可以看到该系统确实出现了混沌现象.

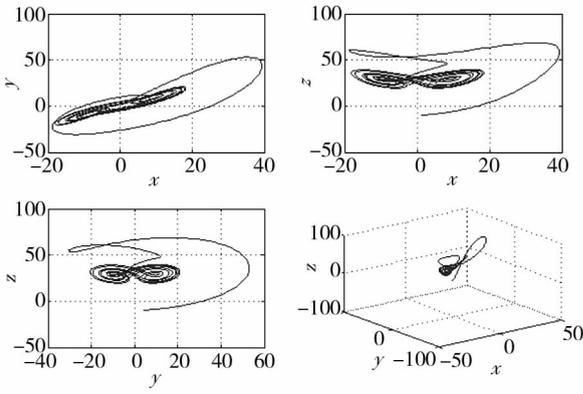


图2 分数阶混沌 Lü 系统的吸引子($\alpha=0.9$)

3 分数阶 Lü 混沌系统同步

为了实现系统同步,接下来研究控制器的设计问题.将系统(9)当作驱动系统,其对应的响应系统为

$$\begin{cases} \frac{d^\alpha x_2}{dt^\alpha} = a(y_2 - x_2); \\ \frac{d^\alpha y_2}{dt^\alpha} = -x_2 z_2 + b y_2 + u_1; \\ \frac{d^\alpha z_2}{dt^\alpha} = x_2 y_2 - c z_2. \end{cases} \quad (11)$$

式中, u_1 是输入信号.目标是实现系统(9)和系统(11)之间的同步,令系统误差为

$$\begin{cases} e_1 = x_1 - x_2; \\ e_2 = y_1 - y_2; \\ e_3 = z_1 - z_2. \end{cases} \quad (12)$$

将式(9)和(11)代入式(12),则误差动态方程组为

$$\begin{cases} \frac{d^\alpha e_1}{dt^\alpha} = a(e_2 - e_1); \\ \frac{d^\alpha e_2}{dt^\alpha} = -z_1 e_1 + b e_2 - x_2 e_3 - u_1; \\ \frac{d^\alpha e_3}{dt^\alpha} = -c e_3 + x_2 e_2 + y_1 e_1. \end{cases} \quad (13)$$

下面研究3种不同的控制信号作用情形.

若控制信号为

$$u_1 = e_1 z_1 + x_2 e_3 - 2b e_2. \quad (14)$$

将式(14)代入式(13),有:

$$\begin{cases} \frac{d^\alpha e_1}{dt^\alpha} = a(e_2 - e_1); \\ \frac{d^\alpha e_2}{dt^\alpha} = -b e_2; \\ \frac{d^\alpha e_3}{dt^\alpha} = -c e_3 + x_2 e_2 + y_1 e_1. \end{cases} \quad (15)$$

而其相应的整数阶误差系统为

$$\begin{cases} \frac{de_1}{dt} = a(e_2 - e_1); \\ \frac{de_2}{dt} = -b e_2; \\ \frac{de_3}{dt} = -c e_3 + x_2 e_2 + y_1 e_1. \end{cases} \quad (16)$$

对系统(16)采用线性化处理,得到雅克比矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ 0 & -b & 0 \\ y_1 & x_2 & -c \end{pmatrix} \quad (17)$$

显然,矩阵 A 的特征根为 $-a, -b, -c$. 因为 a, b, c 取值均大于零,特征根均小于零,于是系统(16)稳定.根据推论1得出,分数阶误差系统(15)渐近稳定. 即当 $t \rightarrow \infty$ 时, $e_1(t), e_2(t)$ 和 $e_3(t)$ 均趋近零,2个分数阶 Lü 混沌系统可以实现有效同步.

若控制信号为

$$u_1 = e_1 z_1 + x_2 e_3 - b e_2. \quad (18)$$

将式(18)代入式(13),得到误差系统:

$$\begin{cases} \frac{d^\alpha e_1}{dt^\alpha} = a(e_2 - e_1); \\ \frac{d^\alpha e_2}{dt^\alpha} = 0; \\ \frac{d^\alpha e_3}{dt^\alpha} = -c e_3 + x_2 e_2 + y_1 e_1. \end{cases} \quad (19)$$

其对应的整数阶误差系统为

$$\begin{cases} \frac{de_1}{dt} = a(e_2 - e_1); \\ \frac{de_2}{dt} = 0; \\ \frac{de_3}{dt} = -c e_3 + x_2 e_2 + y_1 e_1. \end{cases} \quad (20)$$

同样,对系统(20)作线性化处理,其雅克比矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ y_1 & x_2 & -c \end{pmatrix} \quad (21)$$

此时,矩阵特征根为 $-a, 0, -c$. 该控制信号使系统产生了包含特征值为0的雅可比矩阵,整数阶混沌系统(20)处于临界稳定状态.由推论1无法判断对应分数阶误差系统(19)的稳定性.但仿真实验过程发现,在该控制输入作用下,2个分数阶 Lü 混沌系统同样实现了有效同步.

若控制信号为

$$u_1 = e_1 z_1 + x_2 e_3 - b e_2 - b e'. \quad (22)$$

将式(22)代入式(13),得出分数阶误差系统:

$$\begin{cases} \frac{d^\alpha e_1}{dt^\alpha} = a(e_2 - e_1); \\ \frac{d^\alpha e_2}{dt^\alpha} = -b e'; \\ \frac{d^\alpha e_3}{dt^\alpha} = -c e_3 + x_2 e_2 + y_1 e_1. \end{cases} \quad (23)$$

其整数阶误差动态方程为

$$\begin{cases} \frac{de_1}{dt} = a(e_2 - e_1); \\ \frac{de_2}{dt} = -b e'; \\ \frac{de_3}{dt} = -c e_3 + x_2 e_2 + y_1 e_1. \end{cases} \quad (24)$$

采用前面类似方法处理,得到式(24)的雅克比矩阵:

$$A = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ 0 & -b e' & 0 \\ y_1 & x_2 & -c \end{pmatrix} \quad (25)$$

显然,矩阵A的特征根为 $-a, -b e', -c$.3个特征值均小于0,其中一个特征值随时间而变化,误差系统(24)稳定.再根据推论1可知,其对应的分数阶误差系统(23)稳定,即2个分数阶Lü混沌系统之间达到有效同步.

4 仿真实验

由于篇幅所限,这里只对最后一种控制信号产生的结果进行分析.实验过程取分数阶 $\alpha = 0.9$,驱动系统(9)的初始值为 $x_1(0) = 1, y_1(0) = 4, z_1(0) = -10$,相应的响应系统(11)的初始值为 $x_2(0) = 0, y_2(0) = 3, z_2(0) = 9$.同步实验结果如图3和图4所示,系统(9)与系统(11)在1.5s内即可同步,实验结果与理论分析相吻合.

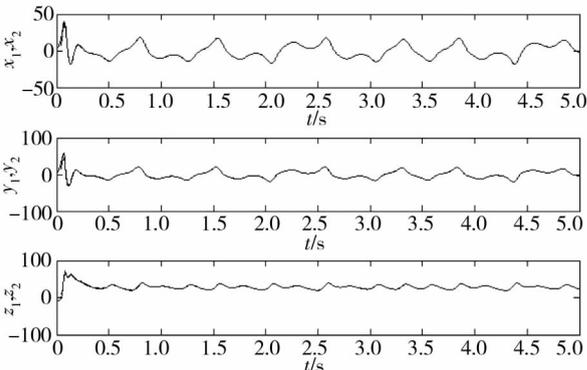


图3 系统(9)和系统(11)的同步状态曲线($\alpha = 0.9$)

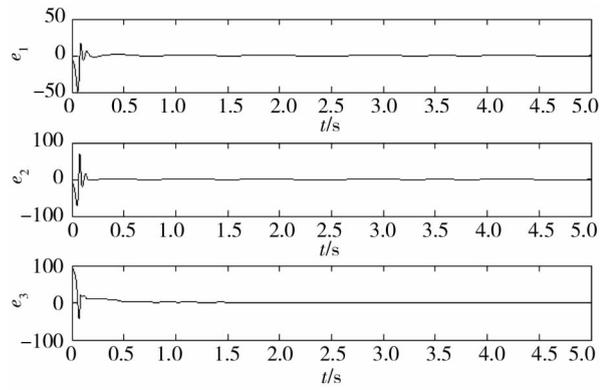


图4 系统(9)与系统(11)三相同步误差的时间响应曲线($\alpha = 0.9$)

5 同步控制方法应用于保密通信

根据混沌掩盖技术和通信原理,将所设计方法运用到保密通信.其原理框图如图5所示.这里, $x_1(t)$ 为驱动系统的混沌信号, $x_2(t)$ 是响应系统的混沌信号, $s(t)$ 为待传送的有用信号, $m(t)$ 为待传输信号和混沌信号的混合信号, $m(t) = s(t) + x_1(t)$, $mm(t)$ 为去掩盖之后得到的有用信号.

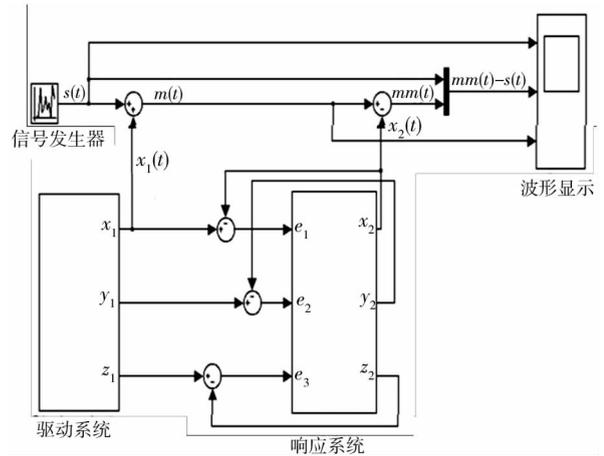


图5 通信系统的混沌掩盖技术

实验过程中取随机信号作为有用传输信息以保证实施方案的通用性.图6是在发送端采用混沌信号作载体,以此隐藏所要传送的信息.不难发现,通过混沌信号载波之后,待发送的信号与原来比较截然不同,达到了遮掩所要传送信息的目的,有效提高通信系统的保密性.在接受端利用混沌同步特性解调出所传输的信息 $x_2(t)$ 后,经过1.5s达成同步,解调之后的信号 $mm(t)$ 准确再生了所要传送的信息 $s(t)$,从而在一定程度上改善了通信系统的保密性.

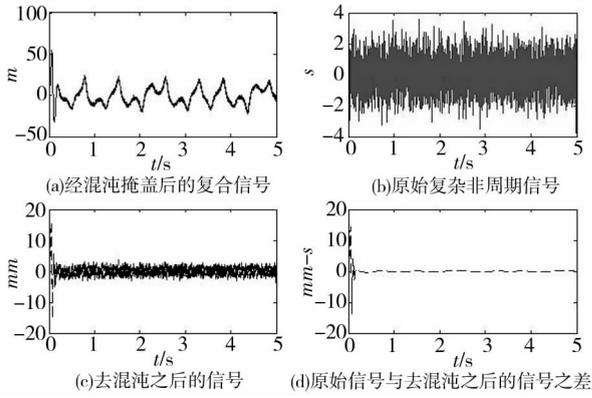


图6 混沌保密通讯

6 结论

提出了一类分数阶混沌系统控制器的新的设计方法,运用单个控制信号,便能完成混沌同步;同时利用混沌时间序列对初始条件的敏感性,以及它的类噪声特性,基于收发双方的混沌同步,一定程度提高通信系统的保密性.给出的实验结果与理论分析是一致的.而且,该方法不仅适用于慢变信号的混沌保密通信,而且在影像处理等领域有实际应用价值.

参考文献:

- [1] Pecora C. Synchronization in chaotic systems [J]. Physical Review Letters, 1990, 64(8): 821 - 824.
- [2] Mohammad S T, Mohammad H. Synchronization of chaotic fractional - order systems via active sliding mode controller [J]. Physica A, 2008, 387(1): 57 - 70.
- [3] Agrawal S K, Srivastava M, Das S. Synchronization of fractional order chaotic systems using active control method [J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2012, 45(6): 737 - 752.
- [4] Wu X, Lu H, Shen S. Synchronization of a new fractional - order hyperchaotic system [J]. Physics Letters A, 2009, 373(27): 2329 - 2337.
- [5] Arman K B, Kia F, Naser P. A chaotic secure communication scheme using fractional chaotic systems based on an extended fractional Kalman filter [J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2009, 14(3): 863 - 879.
- [6] Deng Y S, Qin K Y. Fractional order Liu - system synchronization and its application in multimedia security [J]. 2010 International Conference on Communications, Circuits and Systems. 2010, 23(9): 769 - 772.
- [7] Xu X H. Generalized function projective synchronization of chaotic systems for secure communication [J]. EURASIP Journal on Advances in Signal Processing, 2011 (2011): 1 - 14.
- [8] Zaher A A, Abu - Rezaq A. On the design of chaos - based secure communication systems [J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2011, 16(9): 3721 - 3737.
- [9] Tan W, Jiang F L, Huang C X, et al. Synchronization for a class of fractional - order hyperchaotic system and its application [J]. Journal of Applied Mathematics, 2012 (2012): 1 - 11.
- [10] 蒋逢灵. 分数阶混沌系统同步及其在保密通信中的应用 [D]. 湘潭: 湖南科技大学, 2012.
- [11] Caputo M. Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent [J]. Annals of Geophysics, 1966, 19(4): 383 - 393.
- [12] Matignon D. Stability results of fractional differential equations with applications to control processing [M]. Lille, France: IMACS, IEEE - SMC, 1996.