doi:10.13582/j.cnki.1672-9102.2014.03.015

基于 PAO 算子的直觉模糊多准则决策算法

姜小奇[1,2],魏书堤[2]

(1.中南大学 商学院,湖南 长沙 410083;2.衡阳师范学院 计算机科学系,湖南 衡阳 421008)

摘 要:定义了直觉模糊数及其比较规则,提出了直觉模糊数间的 PAO 算子.针对准则间具有偏好关系且准则权重未知并变化,准则值为直觉模糊数的模糊多准则决策问题,提出了利用 PAO 算子进行集结的决策方法.该方法通过计算各方案在不同准则下的相对满意指数和相对精度,利用 PAO 算子获得每个方案的具体准则权重并生成计分函数和精确函数.通过计分函数的比较,得出方案集的排序结果.实例分析表明了该方法的有效性和可行性.

关键词:直觉模糊数;集结算子;多准则决策;PAO

中图分类号:C934 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-9102(2014)03-0069-04

Intuitionistic fuzzy multi-criteria decision-making method based on prioritized aggregation operators

JIANG Xiaoqi[1,2], WEI Shudi[2]

(1. School of Business, Central South University, Changsha 410083, China;
2. Department of Computer Science, HengYang Normal University, Hengyang 421008, China)

Abstract: Intuitionistic fuzzy numbers and their comparison laws were defined and prioritized aggregation operators for intuitionistic fuzzy numbers were proposed. For fuzzy multi-criteria decision making problems having a preference between criteria, in which the criteria values were intuitionistic fuzzy numbers and the changing weights of the criteria were unknown, an approach based on prioritized aggregation operators was proposed. By using these prioritized aggregation operators, the comparative satisfying index, comparative accuracy and the weights of each alternative under different criteria were calculated, then the values of the score function and accuracy function were attained. By comparing score function and accuracy function values, a ranking of the whole alternative set was attained. Analysis of an example shows that the method is of the feasibility and effectiveness.

Key words: intuitionistic fuzzy numbers; aggregation operators; multi-criteria decision making; prioritized aggregation operators

早在 1986 年,Atanassov 在传统模糊集的基础上增加了非隶属度这一参数,率先提出了直觉模糊集的概念[1].1993 年,Gau 和 Buehrer 定义了 Vague 集[2].其后, Bustince 和 Burillo 证明了 Vague 集实质上就是直觉模糊集[3].由于直觉模糊集合能够更加全面的描述事物隶属状态、非隶属状态以及无法确定的中间状态,更加符合描述客观世界的模糊情况.因此,广泛的应用在诸如决策[4-5]、模式识别[6]、市场预测以及机器学习[7]等领域.近年来,有关直觉模糊集的研究主要集中在直觉模糊算子、直觉模糊决策方法、直觉模糊集的应用等几个方面.如文献[8]和文献[9]对直觉模糊数的大小比

收稿日期:2013-10-17
基金项目:湖南省科技厅资助项目(2013gk3064)
通信作者:姜小奇(1977-),男,辽宁昌图人,博士研究生,讲师,主要从事决策管理、管理信息系统研究. E-mail:wwssdd2000@163.com

较、精确度、直觉模糊平均加权算子、直觉模糊有序加权算子、计分函数等问题进行了论述. 文献[10]和文献[11]对属性值为直觉模糊数、区间直觉模糊数且权重信息不完全的直觉多准则决策方法作出了研究. 文献[12]则定义了直觉语言数,并针对直觉语言数的决策问题,提出了一种基于直觉语言算子的决策方法. 而文献[4]、文献[6]分别论述了直觉模糊集在不同领域的具体应用. 然而,有关多属性直觉模糊决策中,广泛的存在属性之间存在着某种偏好关系,且这种偏好程度随具体准则值变化的问题. 比如,假设人们购买某件产品主要考虑质量以及价格 2 个主要因素,在人们的心目中,产品的质量必须满足一定的要求,然后才开始考虑产品的价格. 也就是说质量属性优先于价格属性. 但是这种优先并不是保持一成不变,因为人们总是选择性价比最好的产品,即对于同类产品中不同的个体,质量属性与价格属性的相对权重并不保持不变,而是与个体的具体属性值密切相关.

本文就是针对多属性直觉模糊决策中,属性值为直觉模糊数,且属性之间存在偏好关系,同时属性的权重随方案值变化的问题,提出了一种基于 PAO 算子的直觉模糊决策方法. 文章的第二部分对直觉模糊数的有关概念进行了阐述. 第三部分论述了直觉模糊数 PAO 算子及其权重的确定方法. 第四部分提出了一种直觉模糊数的决策方法并给出了实例分析.

1 直觉模糊数的定义及其有关运算

定义 1 根据 Atanassov 在文献[1]中的定义,直觉模糊集合 A 定义为

$$A=\{ <x,\boldsymbol{\mu}_A(x),\boldsymbol{v}_A(x)> x\in X\}.$$

其中,$0\leqslant\boldsymbol{\mu}_A(x)+\boldsymbol{v}_A(x)\leqslant 1,\forall x\in X$;

$\boldsymbol{\mu}_A:X\to[0,1]$,$\boldsymbol{\mu}_A(x)\in[0,1]$,表示 x 隶属于集合 A 的程度;

$\boldsymbol{v}_A:X\to[0,1]$,$\boldsymbol{v}_A(x)\in[0,1]$,表示 x 非隶属于集合 A 的程度.

$\boldsymbol{\pi}_A(x)=1-\boldsymbol{\mu}_A(x)-\boldsymbol{v}_A(x)$,$\boldsymbol{\pi}_A(x)\in[0,1]$,称为直觉模糊指数,表示 x 是否隶属或非隶属于 A 的模糊程度.

定义 2 $\alpha=[\boldsymbol{\mu}_\alpha,\boldsymbol{v}_\alpha]$,$\beta=[\boldsymbol{\mu}_\beta,\boldsymbol{v}_\beta]$ 为 2 个直觉模糊数,其中

$\boldsymbol{\mu}_\alpha\in[0,1]$,$\boldsymbol{v}_\alpha\in[0,1]$,$\boldsymbol{\mu}_\beta\in[0,1]$,$\boldsymbol{v}_\beta\in[0,1]$,$0\leqslant\boldsymbol{\mu}_\alpha+\boldsymbol{v}_\alpha\leqslant 1$,$0\leqslant\boldsymbol{\mu}_\beta+\boldsymbol{v}_\beta\leqslant 1$;$S(\alpha)=\boldsymbol{\mu}_\alpha+\boldsymbol{v}_\alpha$,$H(\alpha)=\boldsymbol{\mu}_\alpha+\boldsymbol{v}_\alpha$.

1)如果 $S(\alpha)<S(\beta)$,则 $\alpha<\beta$.

2)如果 $S(\alpha)>S(\beta)$,则 $\alpha>\beta$.

3)如果 $S(\alpha)=S(\beta)$,那么如果 $H(\alpha)<H(\beta)$,则 $\alpha<\beta$;如果 $H(\alpha)=H(\beta)$,则 $\alpha=\beta$;如果 $H(\alpha)>H(\beta)$,则 $\alpha>\beta$.

定义 3 $\alpha=[\boldsymbol{\mu}_\alpha,\boldsymbol{v}_\alpha]$,$\beta=[\boldsymbol{\mu}_\beta,\boldsymbol{v}_\beta]$ 为 2 个直觉模糊数,其中

$\boldsymbol{\mu}_\alpha\in[0,1]$,$\boldsymbol{v}_\alpha\in[0,1]$,$\boldsymbol{\mu}_\beta\in[0,1]$,$\boldsymbol{v}_\beta\in[0,1]$,$0\leqslant\boldsymbol{\mu}_\alpha+\boldsymbol{v}_\alpha\leqslant 1$,$0\leqslant\boldsymbol{\mu}_\beta+\boldsymbol{v}_\beta\leqslant 1$,则

$$\alpha\oplus\beta=[\boldsymbol{\mu}_\alpha+\boldsymbol{\mu}_\beta-\boldsymbol{\mu}_\alpha\boldsymbol{\mu}_\beta,\boldsymbol{v}_\alpha\boldsymbol{v}_\beta],$$

$$\lambda\alpha=[1-(1-\boldsymbol{\mu}_\alpha)\lambda,1-(1-\boldsymbol{v}_\alpha)\lambda].$$

2 直觉模糊 PAO 算子

Yager 在文献[13]中最早阐述了准则值为确定数的 PAO 方法,并讨论了 PAO 算子的有关性质,其后 Gholam R 在文献[14]中将其用在投票系统中. 假设准则集合可以分为独立的 q 个集合,标记为 $H_1,H_2,\cdots,Hq$,$H_i=\{C_{i1},C_{i2},\cdots,C_{in_i}\}$ 表示第 i 个准则集合中具有 n_i 个准则. 而且假定在准则间具有严格的优先级别 $H_1>H_2>Hq$,即对于任意 $i=1,2,\cdots,q$ 和 $k=1,2,\cdots,q$,只要 $i<k$ 则 $H_i>H_k$. 对于任意候选方案 $c_{ij}(x)$ 表示第 j 个准则在第 i 个集合中的满意指标,计分函数 $C(x)=\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{n_i}\boldsymbol{\omega}_{ij}c_{ij}(x)$,其中 $\boldsymbol{\omega}_{ij}$ 是指第 i 个准则集合中第 j 指标的权重.

定理 1 根据 Yager 的 PAO 算法,设多准则决策问题中存在 $H_1,H_2,\cdots,Hq$,q 个准则集合,每个准则集合中只存在一个准则. 共有 n 个待选择方案,每个方法在相应准则下满意度指标标记为 $c_{ij}(x)$($i=1,2,\cdots,n,j==1,2,\cdots,q$). 对于待选方法 i,其 $\boldsymbol{\omega}_{ij}$ 定义如下:

$$\boldsymbol{\omega}_{i1}=1,\ \boldsymbol{\omega}_{ij}=\prod_{k=1}^{j-1}c_{ik}(x).$$

证明过程可参考文献[13].

定理 2 直觉模糊 PAO 算子定义如下,设权重未知直觉模糊多准则决策问题中有 $H_1,H_2,\cdots,H_m$ 共 m 个准则,准则优先关系 $H_1>H_2>\cdots>H_m$,存在 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 共 n 个待排序方案,对应的准则值分别为直觉模糊数,记为 $\boldsymbol{c}_{ij}=[\boldsymbol{\mu}_{ij}\boldsymbol{v}_{ij}]$,表示第 i 个

排序方案在第 j 个准则下的指标值. 其中 $i=1,2,\cdots,n$ 且 $j==1,2,\cdots,m$. $\boldsymbol{\omega}_{ij}$ 为第 i 个排序方法在第 j 个指标下的权重向量. $\boldsymbol{\omega}_{ij}$ 确定过程如下计算:

1)在 $\boldsymbol{c}_{ij}=[\boldsymbol{\mu}_{ij}\boldsymbol{v}_{ij}]$ 中,当 $\boldsymbol{v}_{ij}\geqslant\boldsymbol{\mu}_{ij}$ 时,则 $\boldsymbol{c}_{ij}=0$,且 $\boldsymbol{\omega}_{ij}=1$;

2)当 $j=1$ 时,$\boldsymbol{\omega}_{i1}=1$;

3)若 $\boldsymbol{c}_{ij-1}=0$,则 $\boldsymbol{\omega}_{ij}=1$;

4)当 $j\neq 1$ 时,$\boldsymbol{c}_{ik}\neq 0(k=1,2,\cdots,j)$,根据定义 3 对于第 j 个准则,计算 $s_j=c_{1j}\oplus c_{2j}\oplus\cdots\oplus c_{nj}$,根据定义 2 计算 $S(c_{1j}),S(c_{2j}),\cdots,S(c_{nj})$ 和 $S(s_j)$. 对于第 i 个方案,令 $T_{ij}=S(c_{ij})/S(s_j)$,则 $\boldsymbol{\omega}_{ij}=\prod_{k=1}^{j-1}T_{ik}$.

证明:

1)准则之间存在偏好关系,当 $\boldsymbol{v}_{ij}\geqslant\boldsymbol{\mu}_{ij}$,则 $S(c_{ij})\leqslant 0$,表示在该准则下,方案 A_i 支持度为负数,即该准则下得分函数为 0. 因此令 $\boldsymbol{c}_{ij}=0$,$\boldsymbol{\omega}_{ij}=1$;

2)根据定理 1,有 $j=1$ 时,$\boldsymbol{\omega}_{i1}=1$;

3)根据定义 2 和定义 3,$\boldsymbol{s}_j$ 表示在准则 j 下,所有方案的总体计分. $S(\boldsymbol{c}_{ij})$ 表示方案 i 在准则 j 下的总体满意程度,则 $\boldsymbol{T}_{ij}=S(\boldsymbol{c}_{ij})/S(\boldsymbol{s}_j)$ 表示在 j 准则下,第 i 个方案相对满意程度. 根据定理 1,有 $\boldsymbol{\omega}_{ij}=\prod_{k=1}^{j-1}\boldsymbol{T}_{ik}$.

3　一种权重未知的直觉模糊多准则决策方法

设有权重未知的直觉模糊多准则决策问题中有 $H_1,H_2,\cdots,H_m$ 共 m 个准则,准则优先关系 $H_1>H_2>\cdots>H_m$,存在 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 共 n 个待排序方案,对应的准则值分别为直觉模糊数标记为 $\boldsymbol{c}_{ij}=[\boldsymbol{\mu}_{ij}\boldsymbol{v}_{ij}]$,表示第 i 个排序方案在第 j 个准则下的指标值. 其中 $i,k=1,2,\cdots,n,j,l==1,2,\cdots,m$. 决策过程如下:

1)求解 $\boldsymbol{T}_{ij}=\mathrm{S}(\boldsymbol{c}_{ij})/\mathrm{S}(\boldsymbol{s}_j)$ 和权重 $\boldsymbol{\omega}_{ij}$;

2)求解 $\boldsymbol{H}_{ij}=H(\boldsymbol{c}_{ij})/H(\boldsymbol{s}_j)$;

3)计算方案 A_i 的满意度计分函数 $\boldsymbol{y}_i=\omega_{i1}T_{i1}+\omega_{i2}T_{i2}+\cdots+\omega_{im}T_{im}$;

4)计算方案 A_i 的精度计分函数 $z_i=\omega_{i1}H_{i1}+\omega_{i2}H_{i2}+\cdots+\omega_{im}H_{im}$;

5)若 $y_i>y_k$,则方案 A_i 优于方案方案 A_k;

若 $y_i=y_k,z_i>z_k$,则方案 A_i 优于方案方案 A_k;

若 $y_i=y_k,z_i=z_k$,则根据准则优先顺序,根据定义 2 依次比较 $S(c_{il}),S(c_{kl})H(c_{il}),H(c_{kl})$. 若 $c_{il}>c_{kl}$,则方案 A_i 优于方案方案 A_k,若 $c_{il}=c_{kl}$,则方案 A_i 与方案 A_k 无差别.

假设某企业考虑到某地进行实际投资,考虑当地的政治(α_1),经济(α_2),文化(α_3),人口(α_4)4 个属性因素,且属性间存在 $\alpha_1\geqslant\alpha_2\geqslant\alpha_3\geqslant\alpha_4$ 弱序优先关系. 决策者对 A,B,C,D 4 个地方进行考察,给出了如下的直觉模糊决策矩阵:

$$\boldsymbol{R}_1=\begin{bmatrix}[0.5,0.4] & [0.7,0.1] & [0.5,0.2] & [0.7,0.2]\\ [0.6,0.2] & [0.8,0.1] & [0.6,0.3] & [0.5,0.3]\\ [0.7,0.1] & [0.4,0.2] & [0.8,0.1] & [0.5,0.2]\\ [0.4,0.3] & [0.6,0.2] & [0.6,0.3] & [0.7,0.2]\end{bmatrix}$$

1)计算每个准则下的总体计分 s_1,s_2,s_3,s_4

$s_1=[0.5,0.4]\oplus[0.6,0.2]\oplus[0.7,0.1]\oplus[0.4,0.3]=[0.964,0.002\ 4]$;

$s_2=[0.7,0.1]\oplus[0.8,0.1]\oplus[0.4,0.2]\oplus[0.6,0.2]=[0.985\ 6,0.000\ 08]$;

$s_3=[0.5,0.2]\oplus[0.6,0.3]\oplus[0.8,0.1]\oplus[0.6,0.3]=[0.984,0.001\ 8]$;

$s_4=[0.7,0.2]\oplus[0.5,0.3]\oplus[0.5,0.2]\oplus[0.7,0.2]=[0.977\ 5,0.000\ 96]$.

2)计算 $S(\boldsymbol{c}_{ij}),S(\boldsymbol{s}_j)$ 和 $\boldsymbol{T}_{ij}=S(\boldsymbol{c}_{ij})/S(\boldsymbol{s}_j)$,生成 $\boldsymbol{T}_{ij}$ 矩阵 $\boldsymbol{R}_2$:

$$\boldsymbol{R}_2=\begin{bmatrix}0.1/0.96 & 0.6/0.99 & 0.3/0.98 & 0.5/0.98\\ 0.4/0.96 & 0.7/0.99 & 0.3/0.98 & 0.2/0.98\\ 0.6/0.96 & 0.2/0.99 & 0.7/0.98 & 0.3/0.98\\ 0.1/0.96 & 0.4/0.99 & 0.3/0.98 & 0.5/0.98\end{bmatrix}$$

3)根据定理 2 计算每个方案的 PAO 算子的权重 $\boldsymbol{\omega}_{ij}$:

$\omega_{11}=1$; $\omega_{12}=0.10$; $\omega_{13}=0.07$; $\omega_{14}=0.02$;

$\omega_{21}=1$; $\omega_{22}=0.42$; $\omega_{23}=0.13$; $\omega_{24}=0.04$;

$\omega_{31}=1$; $\omega_{32}=0.63$; $\omega_{33}=0.18$; $\omega_{34}=0.13$;

$\omega_{41}=1$; $\omega_{42}=0.10$; $\omega_{43}=0.04$; $\omega_{44}=0.01$.

4)计算 $\boldsymbol{H}_{ij}=H(\boldsymbol{c}_{ij})/H(\boldsymbol{s}_j)$,生成 $\boldsymbol{H}_{ij}$ 矩阵 $\boldsymbol{R}_3$:

$$\boldsymbol{R}_3=\begin{bmatrix}0.9/0.96 & 0.8/0.99 & 0.7/0.98 & 0.9/0.98\\ 0.8/0.96 & 0.9/0.99 & 0.9/0.98 & 0.8/0.98\\ 0.7,/0.96 & 0.6/0.99 & 0.9/0.98 & 0.7/0.98\\ 0.9/0.96 & 0.8/0.99 & 0.9/0.98 & 0.9/0.98\end{bmatrix}$$

5)计算满意度函数 y_1, y_2, y_3, y_4, 精确度函数 z_1, z_2, z_3, z_4 生成排序结果.

$y_1 = 0.20$; $y_2 = 0.62$; $y_3 = 0.98$; $y_4 = 0.16$.

$y_3 > y_2 > y_1 > y_4$.

因此,无需计算精确度函数的具体数值,方案的优先顺序为 A_3, A_2, A_1, A_4.

4 结论

本文定义了直觉语言集、直觉模糊数及其相关概念,给出了准则值为精确数下的 PAO 算子及其权重,提出了准则值为直觉模糊数的 PAO 算子及其权重确定方法. 针对权重未知的属性间具有偏好关系的直觉模糊多准则问题,提出了一种基于 PAO 算子的决策方法,并给出了具体步骤和算例. 该方法适用于准则权重随具体方案值变化的情况,而这种情况在现实生活中普遍存在. 同时对于准则值和权重都为直觉模糊数的且权重变化的模糊直觉多准则决策问题有待进一步研究.

参考文献:

[1] Atanassov K T. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20(1): 87 – 96.

[2] Gau W L, Buehrer D J. Vague sets[J]. IEEE Transaction on Systems Man, Cybernetics, 1993, 23(2): 610 – 614.

[3] Bustince H, Burillo P. Vague sets are intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy and Systems, 1996, 79(3): 403 – 405.

[4] Atanassov K, Pasi G, Yager R R. Intuitionistic fuzzy interpretations of multi – person multi – criteria decision making[J]. Proceedings of 2002 First International IEEE Symposium "Intelligent Systems", Varna, 2002 (I): 115 – 119.

[5] Chen S M, Tan J M. Handling multicriteria fuzzy decision – making problems based on vague set theory[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1994, 67(2): 163 – 172.

[6] Li D F, Cheng C T. New similarity measures of intuitionistic fuzzy sets and application to pattern recognitions[J]. Pattern Recognition Letters, 2002(23): 221 – 225.

[7] Liang Z Z, Shi P F. Similarity measures on intuitionistic fuzzy sets[J]. Pattern Recognition Letter, 2003(24): 2687 – 2693.

[8] Xu Z S. Intuitionistic fuzzy aggregation operators[J]. IEEE Transaction on Fuzzy Systems, 2007, 15(6): 1179 – 1187.

[9] Deschrijver G, Kerre E E. Implicators based on binary aggregation operators in interval – valued fuzzy set theory [J]. Fuzzy Sets System, 2005, 153(5): 229 – 248.

[10] Turksen B. Interval valued fuzzy sets based on normal forms[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20(1): 191 – 210.

[11] Xu Z S. Methods for aggregating interval – valued intuitionistic fuzzy information and their application to decision making[J]. Control and Decision, 2007, 22 (2): 215 – 219.

[12] Wang J Q, Li H B. Multi – criteria decision – making method based on aggregation operators for intuitionistic linguistic fuzzy numbers[J]. Control and Decision, 2010, 25(10): 1571 – 1574.

[13] Yager R R. Prioritized aggregation operators[J]. Internationl Journal Approximate Reasoning , 2008 (48): 263 – 274.

[14] Gholam R A, Hamid S G. Application of prioritized aggregation operators in preference voting [J]. International Journal of Intelligent Systems, 2010(24): 1027 – 1034.