

易于拼接且形状可调的 Bézier 曲线曲面

严兰兰

(东华理工大学 理学院,江西 南昌 330013)

摘要:为了增强 Bézier 曲线曲面形状表示的灵活性,同时简化 Bézier 曲线曲面的光滑拼接条件,构造了 3 组含参数的多项式基函数,并由它们定义了结构分别类似于二次、三次、四次 Bézier 曲线曲面的新曲线曲面. 它们不仅保留了 Bézier 曲线曲面的基本性质,而且还具有形状可调性,并且由新曲线曲面构成的组合曲线曲面可以在简单的条件下实现 G^2 或 G^3 光滑拼接. 另外还给出了构造与给定多边形相切的曲线的方法,该方法简单有效,而且曲线对给定的多边形是保形的.

关键词:曲线曲面设计; Bézier 方法; 形状参数; 几何连续; 切线多边形

中图分类号:TP391.72 **文献标志码:**A **文章编号:**1672-9102(2014)03-0119-06

Bézier curves and surfaces which are easy to piece and shape adjustable

YAN Lanlan

(College of Science, East China Institute of Technology, Nanchang 330013, China)

Abstract: In order to enhance the shape representation flexibility and simplify the smooth connecting conditions of Bézier curve and surface, three groups of polynomial basis functions with shape parameter were constructed. Based on them, three kinds of new curves and surfaces, which had the similar structure with the quadratic, cubic and quartic Bézier curve and surface respectively, were defined. The new curves and surfaces not only possess the basic properties of Bézier curve and surface, but also have shape adjustability. Furthermore, under simple conditions, the composite curves and surfaces consist of the new curves and surfaces achieve G^2 or G^3 continuity. Besides, the method of constructing curves tangent to the given polygons is presented. This method is simple and effective. And the curves are conformal to the given polygons.

Key words: curve and surface design; Bézier method; shape parameter; geometric continuity; tangent polygon

Bézier 方法因为采用独特的 Bernstein 多项式作为基函数,使得它具有许多优良的性质,一经问世,就受到工业界和 CAGD 学术界的广泛重视,并在实践中表现出强大的生命力^[1]. 虽然 Bézier 方法的确具有很多优点,但在实际应用中,它依然表现出一些不足和不便之处. 例如,由于 Bézier 曲线曲面的形状由其控制顶点唯一确定,所以若要其形状,必须改变控制顶点,重新计算曲线曲面方程,这样做不仅不方便,而且可能会违背设计者的意图.

另外,由于单一的 Bézier 曲线曲面无法表示复杂的形状,所以为了满足实际工程中的需求,往往需要构造组合 Bézier 曲线曲面,而为了保证组合曲线曲面的光滑性,相邻曲线曲面的控制顶点间必须满足一定的连续性条件,而当对光滑性的要求较高时,条件往往会比较复杂从而难以实现,这给 Bézier 方法在实际工程中的应用造成了一些不便.

对于 Bézier 方法的上述第一个不足,很多文献提出了解决办法,主要思想是构造含参数的、性质

类似于 Bernstein 基函数的新的基函数,使得由之定义的曲线曲面在具备 Bézier 方法基本性质的同时,还具有形状可调性.例如,张贵仓等^[2]定义了带 3 个形状参数的三次多项式曲线曲面,对二次 Bézier 方法进行了扩展.谢进等^[3],杭后俊等^[4]分别定义了带 2 个形状参数的四次多项式曲线曲面,对三次 Bézier 方法进行了扩展.刘小琼等^[5]定义了带 2 个形状参数的六次多项式曲线曲面,对四次 Bézier 方法进行了扩展.在初始函数的基础上,Wang Wen-tao 等^[6]利用特殊的递推公式,吴晓勤等^[7]利用 de Casteljau 算法,都定义了带 1 个参数的 $n+1$ 次多项式基函数;同样采用 de Casteljau 算法,严兰兰等前后定义了带 2 个参数的 $n+1$ 次多项式基函数^[8],带 1 个参数的 $n+2$ 次多项式基函数^[9],和带 2 个参数的 $n+2$ 次多项式基函数^[10];另外,Xi-An Han 等^[11],CHEN Jie 等^[12]分别给出了带多个参数的 $n+1$ 次和 n 次多项式基函数.文献[6-12]中的基函数都是 $n(n \geq 2)$ 次 Bernstein 基函数的扩展,由它们定义的曲线曲面都对二次及二次以上的 Bézier 方法进行了扩展.

虽然文献[2-12]中定义的曲线曲面在保留 Bézier 方法众多优良性质的同时,还可以在不改变控制顶点的情况下,通过选择合适的参数来得到满意的形状,从而解决了 Bézier 方法不具备形状可调性的问题.但是注意到,这些曲线曲面都和普通 Bézier 方法一样,在构造组合曲线曲面时,都需要满足相对复杂的条件才能实现较高阶的光滑拼接.就是说,现有文献中的扩展 Bézier 曲线曲面,几乎都没有很好地解决 Bézier 方法在描述复杂形状时的不便之处.由此考虑:能否定义新的曲线曲面,使之在继承 Bézier 方法基本性质的同时,既具有形状可调性,又能够在比较简单的条件下实现较高阶的光滑拼接呢?

考虑到在工程实际中,低次 Bézier 方法最常用,在描述复杂形状时, G^2/G^3 光滑拼接可以满足大多数需求.所以为了使低次 Bézier 曲线曲面可以在相对简单的条件下实现 G^2/G^3 光滑拼接,同时可以在不改变控制顶点的情况下进行形状调整,这里定义了 3 种新的曲线曲面.它们保留了 Bézier 方法的凸包性,几何不变性,对称性,端点插值与端边相切性,具有比 Bézier 方法更好的对控制多边形的逼近性.最重要的是,即使不改变控制顶点,它们的形状依然可以通过改变形状参数的值进行调整.另外,只要相邻曲线曲面的控制顶点满足 Bézier 方法的 G^1 光滑拼接条件,新曲线曲面之间就可以达到 G^2 或 G^3 光滑拼接.

1 基函数及其性质

通过将基函数的次数提升 2 次,并引入形状参数,这里分别给出由 3~5 个多项式函数构成的函数组.

定义 1 对 $t \in [0,1]$,参数 $\lambda \in (0,1]$,称关于 t 的 4 次多项式

$$\begin{cases} a_{20}(t) = (1-t)^3[1+(3-4\lambda)t]; \\ a_{21}(t) = 2t(1-t)[2\lambda+(3-4\lambda)t+(4\lambda-3)t^2]; \\ a_{22}(t) = t^3[4(1-\lambda)+(4\lambda-3)t]. \end{cases} \quad (1)$$

为带参数 λ 的二阶 Bernstein 基函数,简称二阶 λB 基;称关于 t 的 5 次多项式

$$\begin{cases} a_{30}(t) = (1-t)^4[1+(4-5\lambda)t]; \\ a_{31}(t) = 5t(1-t)^3[\lambda+(2-\lambda)t]; \\ a_{32}(t) = 5t^3(1-t)[2+(\lambda-2)t]; \\ a_{33}(t) = t^4[5(1-\lambda)+(5\lambda-4)t]. \end{cases} \quad (2)$$

为带参数 λ 的三阶 Bernstein 基函数,简称三阶 λB 基;称关于 t 的 6 次多项式

$$\begin{cases} a_{40}(t) = (1-t)^5[1+(5-6\lambda)t]; \\ a_{41}(t) = 3t(1-t)^3[2\lambda+(5-4\lambda)t-3t^2]; \\ a_{42}(t) = (8+12\lambda)t^3(1-t)^3; \\ a_{43}(t) = 3t^3(1-t)[2(1-\lambda)+(1+4\lambda)t-3t^2]; \\ a_{44}(t) = t^5[6(1-\lambda)+(6\lambda-5)t]. \end{cases} \quad (3)$$

为带参数 λ 的四阶 Bernstein 基函数,简称四阶 λB 基.

λB 基可以用 Bernstein 基函数来表示,表示结果为

$$a_{20}(t) = B_{40} + (1-\lambda)B_{41}; a_{21}(t) = \lambda B_{41} + B_{42} + \lambda B_{43}; a_{22}(t) = (1-\lambda)B_{43} + B_{44}. \quad (4)$$

$$a_{30}(t) = B_{50} + (1-\lambda)B_{51}; a_{31}(t) = \lambda B_{51} + B_{52}; a_{32}(t) = B_{53} + \lambda B_{54}; a_{33}(t) = (1-\lambda)B_{54} + B_{55}. \quad (5)$$

$$a_{40}(t) = B_{60} + (1-\lambda)B_{61}; a_{41}(t) = \lambda B_{61} + B_{62} + \frac{3(1-\lambda)}{10}B_{63}; a_{42}(t) = \frac{2+3\lambda}{5}B_{63}; a_{43}(t) = \frac{3(1-\lambda)}{10}B_{63} + B_{64} + \lambda B_{65}; a_{44}(t) = (1-\lambda)B_{65} + B_{66}. \quad (6)$$

式(4)~式(6)中 $B_{ni}(n=4,5,6;0 \leq i \leq n)$ 为 Bernstein 基函数, $B_{ni} = C_n^i t^i (1-t)^{n-i}$.

λB 基具有下列性质:

1)非负性:对任意的参数 $\lambda \in (0,1]$,当 $t \in [0,1]$ 时,有 $a_{ni}(t) \geq 0 (n=2,3,4;0 \leq i \leq n)$.

证明:由式(4)~式(6),与参数 λ 的范围,以及 Bernstein 基函数的非负性易知.

2)规范性: $\sum_{i=0}^n a_{ni}(t) = 1, n=2,3,4$.

证明:由式(4)~式(6),以及 Bernstein 基函数的规范性易知.

3) 对称性:对任意的 $t \in [0,1]$, 有 $a_{ni}(t) = a_{n,n-i}(1-t)$ ($n = 2,3,4; 0 \leq i \leq n$).

证明:由式(4)~式(6),以及 Bernstein 基函数的对称性易知.

4) 端点性质:对 $n = 2,3,4, 0 \leq i \leq n$, 有

$$\begin{cases} a_{ni}(0) = \begin{cases} 1, & i = 0; \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} \\ a'_{ni}(0) = \begin{cases} -(n+2)\lambda, & i = 0; \\ (n+2)\lambda, & i = 1; \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} \\ a''_{ni}(0) = \begin{cases} (n+2)(n+1)(2\lambda-1), & i = 0; \\ (n+2)(n+1)(1-2\lambda), & i = 1; \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} \\ a_{ni}(1) = \begin{cases} 1, & i = n; \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} \\ a'_{ni}(1) = \begin{cases} -(n+2)\lambda, & i = n-1; \\ (n+2)\lambda, & i = n; \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} \\ a''_{ni}(1) = \begin{cases} (n+2)(n+1)(1-2\lambda), & i = n-1; \\ (n+2)(n+1)(2\lambda-1), & i = n; \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} \end{cases} \quad (7)$$

特别地,当 $\lambda = 1$ 时,

$$\begin{cases} a''_{20}(0) = -24; a''_{21}(0) = 24; a''_{22}(0) = 0; \\ a''_{20}(1) = 0; a''_{21}(1) = -24; a''_{22}(1) = 24. \end{cases} \quad (8)$$

证明:直接由式(1)~式(3),经过计算易得上述结果.

5) 线性无关性: $\sum_{i=0}^n k_i a_{ni} = 0$ 当且仅当 $k_i = 0$ ($0 \leq i \leq n; n = 2,3,4$).

证明:只证二阶情形,三、四阶类似可证.充分性显然,下面证明必要性.假设

$$\sum_{i=0}^n k_i a_{2i} = 0,$$

式中, $k_i \in \mathbf{R}$ ($i = 0,1,2$), 将式(4)代入上式并整理得

$$k_0 B_{40} + [k_0(1-\lambda) + k_1\lambda] B_{41} + k_1 B_{42} + [k_1\lambda + k_2(1-\lambda)] B_{43} + k_2 B_{44} = 0.$$

由四次 Bernstein 基函数的线性无关性可得

$$k_0 = 0; k_0(1-\lambda) + k_1\lambda = 0; k_1 = 0; k_1\lambda + k_2(1-\lambda) = 0; k_2 = 0.$$

易知此方程组的解为 $k_i = 0$ ($i = 0,1,2$), 这表明二阶 λB 基线性无关.

2 曲线及其性质

2.1 曲线的定义与性质

定义2 给定 $n+1$ ($n=2,3,4$) 个控制顶点 V_i

$\in \mathbf{R}^d$ ($d = 2,3; 0 \leq i \leq n$), 称多项式曲线

$$a_n(t) = \sum_{i=0}^n a_{ni}(t) V_i, t \in [0,1], \quad (9)$$

为 n ($n=2,3,4$) 阶 λ -Bézier 曲线.

由 λB 基的性质,易知 λ -Bézier 曲线具有凸包性、几何不变性、对称性.另外,由式(7)~式(9)式可知,在 λ -Bézier 曲线的起点和终点处,有

$$\begin{cases} a_n(0) = V_0; \\ a_n(1) = V_n; \\ a'_n(0) = (n+2)\lambda(V_1 - V_0); \\ a'_n(1) = (n+2)\lambda(V_n - V_{n-1}); \\ a''_n(0) = (n+2)(n+1)(1-2\lambda)(V_1 - V_0); \\ a''_n(1) = (n+2)(n+1)(2\lambda-1)(V_n - V_{n-1}). \end{cases} \quad (10)$$

式中, $n=2,3,4$. 特别地,当 $\lambda = 1$ 时,还有 $a''_2(0) = 24(V_1 - V_0); a''_2(1) = 24(V_2 - V_1)$. (11) 由式(10)可知, λ -Bézier 曲线具有端点插值、端边相切性.

此外,由于 λB 基含参数,故 λ -Bézier 曲线的形状可以在不改变控制顶点的情况下通过改变参数 λ 的值进行调整.

图1~图3分别给出了由相同控制顶点和不同参数确定的二至四阶 λ -Bézier 曲线(实曲线)与二至四次 Bézier 曲线(点线).图1~图3中实曲线1~3分别为取参数 $\lambda = 0.01, \lambda = 0.5, \lambda = 1$. 从图中可以看出,参数 λ 的值越大, λ -Bézier 曲线越接近其控制多边形,而且在一定的参数范围内, λ -Bézier 曲线对控制多边形的逼近性会优于普通 Bézier 曲线.

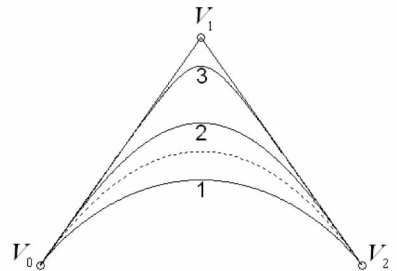


图1 二阶 λ -Bézier 曲线与二次 Bézier 曲线

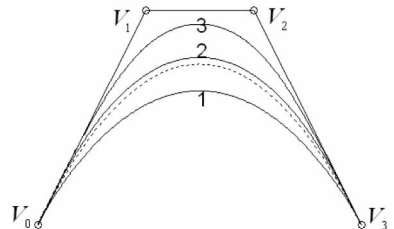


图2 三阶 λ -Bézier 曲线与三次 Bézier 曲线

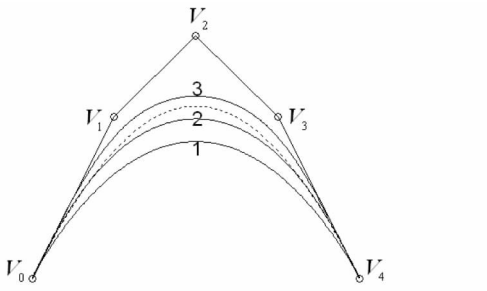


图3 四阶 λ -Bézier 曲线与四次 Bézier 曲线

2.2 组合曲线的连续性

定理1 设有分别带参数和的 m 阶与 n 阶 ($m, n = 2, 3, 4$) λ -Bézier 曲线

$$a_m(t) = \sum_{i=0}^m a_{mi}(t, \lambda_1) V_i;$$

$$b_n(t) = \sum_{i=0}^n a_{ni}(t, \lambda_2) R_i; t \in [0, 1].$$

若这2条曲线的控制顶点满足关系

$$R_0 = V_m; R_1 = R_0 + C(V_m - V_{m-1}) (C > 0). \quad (12)$$

则二者在公共连接点处 G^2 连续; 特别地, 若 $m = n = 2$ 且 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, 则二者 G^3 连续.

证明: 只证 G^3 连续, G^2 连续类似可证. 由式(10)、式(11)可知, 当 $m = n = 2$ 且 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 时

$$\begin{cases} b_2(0) = R_0; \\ b'_2(0) = 4(R_1 - R_0); \\ b''_2(0) = 12(R_0 - R_1); \\ b_2(1) = 24(R_1 - R_0); \\ a_2(1) = V_2; \\ a'_2(1) = 4(V_2 - V_1); \\ a''_2(1) = 12(V_2 - V_1); \\ a_2(1) = 24(V_2 - V_1). \end{cases} \quad (13)$$

在式(12)所给条件下, 有

$$\begin{cases} b_2(0) = a_2(1); \\ b'_2(0) = \beta_1 a'_2(1); \\ b''_2(0) = \beta_1^2 a''_2(1) + \beta_2 a'_2(1); \\ b_2(1) = \beta_1^3 a_2(1) + 3\beta_1 \beta_2 a'_2(1) + \beta_3 a'_2(1). \end{cases} \quad (14)$$

式中, $\beta_1 = C > 0, \beta_2 = -3C(1 + C), \beta_3 = 3C(1 + C)(2 + 7C)$, 故二者 G^3 连续. 证毕.

对于 Bézier 曲线而言, 在式(12)所给条件下, 相邻曲线只会达到 G^1 光滑拼接, 而 λ -Bézier 曲线却可以达到 G^2 或 G^3 光滑拼接. 另外, 由于式(12)与参数 λ 无关, 所以当定理条件满足时, 还可以通过改变 λ_1 和 λ_2 的值来调整相邻曲线的形状, 而不会破坏曲线之间的连续性.

图4~图7给出了在控制顶点满足式(12)所给条件下, 通过选择不同的 λ_1 和 λ_2 , 得到的不同的组合 λ -Bézier 曲线. 图4中曲线段1取 $\lambda_1 = 0.5$, 曲线段2~4分别取 $\lambda_2 = 0.01, 0.5, 1$. 图5取 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. 图6中曲线段1取 $\lambda_1 = 0.5$, 曲线段2, 3分别取 $\lambda_2 = 0.01, \lambda_2 = 1$. 图7取 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.5$.

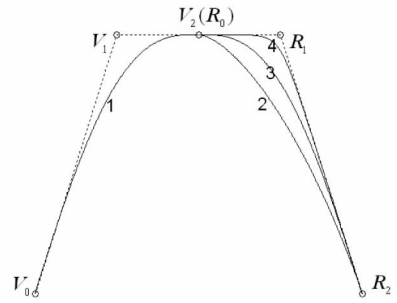


图4 G^2 连续的组合二阶 λ -Bézier 曲线

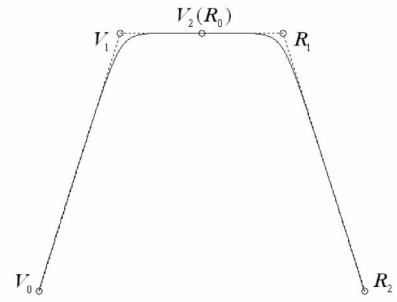


图5 G^3 连续的组合二阶 λ -Bézier 曲线

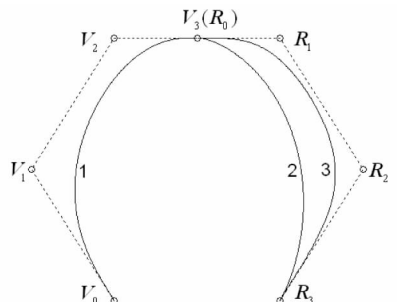


图6 G^2 连续的组合三阶 λ -Bézier 曲线

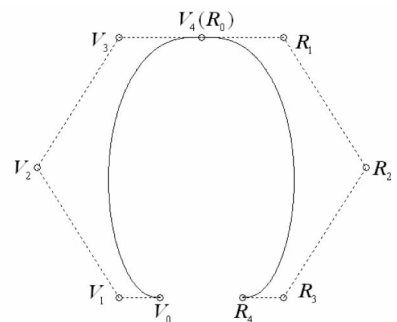


图7 G^2 连续的组合四阶 λ -Bézier 曲线

2.3 曲线的应用

给定闭多边形 P_0, P_1, \dots, P_n , 其中 $P_0 = P_n$,

下面分析如何构造一条封闭的组合二阶 λ -Bézier 曲线,使之与给定闭多边形的每一条边都在指定点相切^[13]. 设闭多边形的第 i 条边上的切点为

$$T_i = (1 - k_i)P_{i-1} + k_iP_i, \quad (15)$$

其中 $k_i \in (0,1) (1 \leq i \leq n)$ 为切点调节参数.

为实现上述目标,首先增加虚拟切点 $T_{n+1} = T_1$, 然后在每 2 个相邻切点 T_i 和 T_{i+1} 之间构造一条二阶 λ -Bézier 曲线 $a_{2i}(t) (1 \leq i \leq n)$, 因此整条组合曲线由 n 条曲线组成. 取第 i 条曲线

$$a_{2i}(t) = \sum_{j=0}^2 a_{2i}(t, \lambda_i) V_{ij}; t \in [0,1]. \quad (16)$$

的控制顶点为

$$V_{i0} = T_i; V_{i1} = P_i; V_{i2} = T_{i+1}. \quad (17)$$

由式(10)、式(15)~式(17)可知

$$\begin{cases} a_{2i}(0) = T_i; \\ a_{2i}(1) = T_{i+1}; \\ a'_{2i}(0) = 4\lambda_i(1 - k_i)(P_i - P_{i-1}); \\ a'_{2i}(1) = 4\lambda_i k_{i+1}(P_{i+1} - P_i). \end{cases} \quad (18)$$

由式(18)可知,第 i 条二阶 λ -Bézier 曲线与给定闭多边形相切于点 T_i 和 T_{i+1} . 另外,由定理 1 可知:一般情况下,相邻 2 条二阶 λ -Bézier 曲线在连接点处 G^2 连续;若相邻两段曲线均取 $\lambda = 1$, 则二者在连接点处 G^3 连续.

这里给出的构造与给定多边形相切的曲线的方法具有以下优点:

- 1) 曲线的所有控制顶点直接由给定多边形的顶点和切点确定,无需做额外运算;
- 2) 相邻曲线段在连接点处 G^2 或 G^3 连续,可以满足工程上的大部分需求;
- 3) 整条曲线的形状可以或整体(各曲线段取相同的参数)或局部地(各曲线段的参数不全相同)进行调整,而不会破坏相邻曲线之间的连续性;
- 4) 由于二阶 λ -Bézier 曲线不存在拐点,且曲线的凹凸性与控制多边形一致,所以整条曲线对给定的切线多边形是保形的.

图 8 给出了与相同多边形相切于相同点的 2 条不同的组合二阶 λ -Bézier 曲线. 图中点线为给定的切线多边形,打星号的点为切点,实线为二阶 λ -Bézier 曲线. 图 8(a)中,所有曲线段取相同的参数 $\lambda_i = 0.5 (i = 1, 2, \dots, 6)$. 图 8(b)中,曲线段 1~6 依次取参数 0.8, 0.1, 0.4, 0.1, 0.8, 0.1.

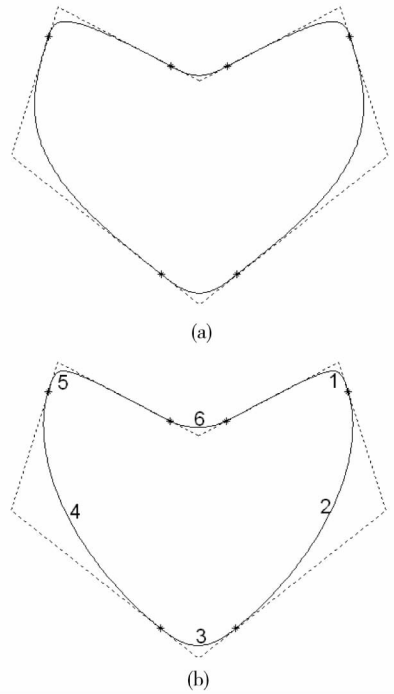


图 8 与给定多边形相切的二阶 λ -Bézier 曲线

3 曲面及其性质

定义 3 给定控制顶点 $V_{ij} \in R^3 (i = 0, 1, \dots, m; j = 0, 1, \dots, n; m, n = 2, 3, 4)$, 参数 $\lambda_u, \lambda_v \in (0,1]$, 称

$$b(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n b_{mi}(u, \lambda_u) b_{nj}(v, \lambda_v) V_{ij}; 0 \leq u, v \leq 1. \text{ 为 } m \times n \text{ 阶 } \lambda \text{-Bézier 曲面.}$$

λ -Bézier 曲面具有与 λ -Bézier 曲线类似的性质,如凸包性、几何不变性、对称性、形状可调性等. 另外,关于组合 λ -Bézier 曲面的连续性,有如下结论.

定理 2 设有 $m \times n_1$ 阶 λ -Bézier 曲面与 $m \times n_2$ 阶 λ -Bézier 曲面:

$$b_1(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{n_1} b_{mi}(u, \lambda_0) b_{n_1j}(v, \lambda_1) V_{ij}; b_2(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{n_2} b_{mi}(u, \lambda_0) b_{n_2j}(v, \lambda_2) R_{ij}. \quad (19)$$

式中, $m, n_1, n_2 = 2, 3, 4, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \in (0,1]$, 若 $R_0 = V_{i, n_1}; R_{i1} = R_0 + C(V_{i, n_1} - V_{i, n_1-1}) (C > 0)$. (20) 式中, $0 \leq i \leq m$, 则两曲面 G^2 连续;特别地,若 $n_1 = n_2 = 2$ 且 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, 则两曲面 G^3 连续.

证明:只证 G^3 连续, G^2 连续类似可证. 由式(7)、式(8)、式(19)可得

$$b_2(u, 0) = \sum_{i=0}^m b_{mi}(u, \lambda_0) R_{i0}; b_1(u, 1) = \sum_{i=0}^m b_{mi}(u, \lambda_0) V_{i2}; \frac{\partial}{\partial v} b_2(u, 0) = 4 \sum_{i=0}^m b_{mi}(u, \lambda_0) (R_{i1} - R_{i0});$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v} \mathbf{b}_1(u, 1) &= 4 \sum_{i=0}^m b_{mi}(u, \lambda_0) (\mathbf{V}_{i2} - \mathbf{V}_{i1}); \\ \frac{\partial^2}{\partial v^2} \mathbf{b}_2(u, 0) &= 12 \sum_{i=0}^m b_{mi}(u, \lambda_0) (\mathbf{R}_{i0} - \mathbf{R}_{i1}); \\ \frac{\partial^2}{\partial v^2} \mathbf{b}_1(u, 1) &= 12 \sum_{i=0}^m b_{mi}(u, \lambda_0) (\mathbf{V}_{i2} - \mathbf{V}_{i1}); \\ \frac{\partial^3}{\partial v^3} \mathbf{b}_2(u, 0) &= 24 \sum_{i=0}^m b_{mi}(u, \lambda_0) (\mathbf{R}_{i1} - \mathbf{R}_{i0}); \\ \frac{\partial^3}{\partial v^3} \mathbf{b}_1(u, 1) &= 24 \sum_{i=0}^m b_{mi}(u, \lambda_0) (\mathbf{V}_{i2} - \mathbf{V}_{i1}). \end{aligned}$$

在式(20)所给条件下,有

$$\begin{cases} \mathbf{b}_2(u, 0) = \mathbf{b}_1(u, 1); \\ \frac{\partial}{\partial v} \mathbf{b}_2(u, 0) = \beta_1 \frac{\partial}{\partial v} \mathbf{b}_1(u, 1); \\ \frac{\partial^2}{\partial v^2} \mathbf{b}_2(u, 0) = \beta_1^2 \frac{\partial^2}{\partial v^2} \mathbf{b}_1(u, 1) + \beta_2 \frac{\partial}{\partial v} \mathbf{b}_1(u, 1); \\ \frac{\partial^3}{\partial v^3} \mathbf{b}_2(u, 0) = \beta_1^3 \frac{\partial^3}{\partial v^3} \mathbf{b}_1(u, 1) + 3\beta_1\beta_2 \frac{\partial^2}{\partial v^2} \mathbf{b}_1(u, 1) + \beta_3 \frac{\partial}{\partial v} \mathbf{b}_1(u, 1). \end{cases}$$

式中, $\beta_1 = C > 0, \beta_2 = -3C(1 + C), \beta_3 = 3C(1 + C)(2 + 7C)$, 故两曲面 G^3 连续. 证毕.

图9所示为在相同控制网格下,通过选择不同的参数得到的由 2×3 阶和 3×3 阶 λ -Bézier 曲面构成的两张 G^2 连续的组合曲面.

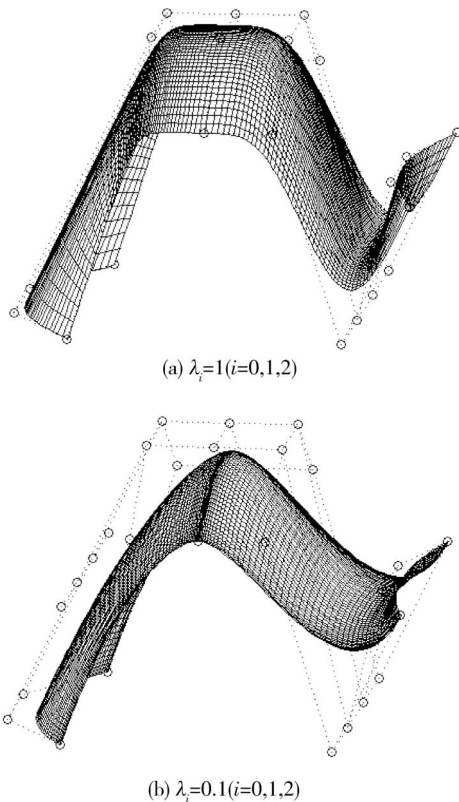


图9 G^2 连续的组合 λ -Bézier 曲面

4 结论

这里定义的低阶 λ -Bézier 曲线曲面,具备几何设计中所要求的凸包性、几何不变性、对称性等基本性质,可以在不改变控制顶点的情况下通过改变形状参数的值来调整形状,而且可以在简单的条件下实现 G^2 或 G^3 光滑拼接.如何构造具有类似性质的高阶 λ -Bézier 曲线曲面,如何使曲线曲面在相同条件(式(12)、(20)式所给条件)下能达到光滑拼接阶数进一步提升,都是下一步的研究内容.另外,如何构造具有类似形状的三角域 Bernstein-Bézier 曲面,也是值得思考的问题.

参考文献:

- [1] 施法中. 计算机辅助几何设计与非均匀有理 B 样条 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2001.
- [2] 张贵仓, 师利红. 带多个形状参数的 Bézier 曲线[J]. 西北师范大学学报(自然科学版), 2010, 46(4): 24-27.
- [3] 谢进, 洪素珍. 一类带两个形状参数的三次 Bézier 曲线[J]. 计算机工程与设计, 2007, 28(6): 1361-1363.
- [4] 杭后俊, 余静, 李汪根. 三次 Bézier 曲线的一种双参数扩展及应用[J]. 计算机工程与应用, 2010, 46(31): 178-181.
- [5] 刘小琼, 杨国英. 带两个形状参数的四次 Bézier 曲线的扩展[J]. 图学学报, 2013, 34(1): 41-45.
- [6] Wang W T, Wang G Z. Bézier curves with shape parameter[J]. Journal of Zhejiang University - Science A, 2005, 6A(6): 497-501.
- [7] 吴晓勤. 带形状参数的 Bézier 曲线[J]. 中国图象图形学报, 2006, 11(2): 269-274.
- [8] 严兰兰, 宋来忠. 带两个形状参数的 Bézier 曲线[J]. 工程图学学报, 2008, 29(3): 88-92.
- [9] Yan L L, Liang J F. An extension of the Bézier model [J]. Applied Mathematics and Computation, 2011, 218(6): 2863-2879.
- [10] 严兰兰, 邹国根. Bézier 方法的新扩展[J]. 合肥工业大学学报(自然科学版), 2013, 36(5): 625-631.
- [11] Han X A, Ma Y C, Huang X L. A novel generalization of Bézier curve and surface[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2008, 217(1): 180-193.
- [12] Chen J, Wang G J. A new type of the generalized Bézier curves [J]. Applied Mathematics - A Journal of Chinese Universities, 2011, 26(1): 47-56.
- [13] 刘植, 檀结庆, 江平, 等. 与给定多边形相切的 C^2 四次广义 Ball 闭曲线[J]. 高等学校计算数学学报, 2012, 34(3): 231-237.