第29卷 第3期　　湖南科技大学学报(自然科学版)　　Vol.29 No.3
2014年　9月　Journal of Hunan University of Science & Technology(Natural Science Edition)　Sept. 2014

doi:10.13582/j.cnki.1672-9102.2014.03.026

基于组合数的OWA算子赋权方法

杨昔阳[1],肖晓羽[2],李志伟[1]

(1.泉州师范学院 数学与计算机科学学院,福建 泉州 362000;2. 北京师范大学 出版社,北京 100875)

摘　要:OWA算子是一种重要的多属性综合决策方法,广泛应用于各种管理与决策领域,如何科学地给出OWA算子的权重是这一领域重要的问题之一. 基于组合数的对称性质,提出了一种具有截断均值评价法的特点,又考虑到评价者乐观程度的OWA赋权模型,由于该模型可以表示成一个二次规划,所以计算效率比较高. 给出了这种赋权模型的2条性质,说明了这个模型的解与乐观程度之间的关系. 最后利用文中提出的模型对若干个出版物进行综合评价,说明了这种赋权模型的使用方法.

关键词:OWA算子;组合数;权重

中图分类号:O231　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-9102(2014)03-0125-04

A new method to obtain the OWA weights based on combination numbers

YANG Xiyang[1], XIAO Xiaoyu[2], LI Zhiwei[1]

(1. School of Math and Computer Sciences, Quanzhou Normal University, Quanzhou 362000, China;
2. Beijing Normal University Press, Beijing 100875, China)

Abstract: The OWA operator is an important averaging method in multiple attribute decision making. How to assign reasonable weights of OWA operators is an important issue in this field. Based on the density function of binomial distribution, a new method similar to trimmed mean was proposed. The orness level was a parameter in this method. Two propositions are proven, and a numerical example was given to analyze and illustrate this method.

Key words: OWA operators; combination number; weights

Yager给出的有序加权平均(OWA)算子理论[1]是处理多属性综合决策的常用的方法之一. OWA首先对各个属性值按照其大小进行重新排序,进而通过加权平均来确定待评价对象的优劣,它被广泛应用于神经网络、模糊控制、决策评价等场合[2-3].

如何确定各属性相应的权重是OWA算子理论最重要的问题和环节. 权重的设置不仅受到评价者乐观程度的影响,例如乐观型评价(maximum),悲观型评价(minimum)和综合性评价(average),也受到一些约定俗成的客观因素影响,比如为了避免感情用事,决策过程往往约定去掉一个最高分,去掉一个最低分. 然而这种方法存在着2点不足,一是它未能体现最大值、最小值的作用,虽然这种作用看起来应该是比较微小的;二是它未能体现决策者的乐观水平,不同乐观水平的评价者对各属性的高分、低分显然存在不同的看法. 虽然OWA算子已经在社会经济、管理等众多领域取得了一些应用,但如果要科学地给出一套确定OWA权重的方法,却还是一个值得深入研究的课题. 近些年来有些学者提出了一些通过约束乐观水平的优化模型来确定OWA算子的权重,例如最大化权重熵值模型(the maximum entropy)[4-5], 最小偏差模型(minimum variability)[6],最小二乘差分模型(least square deviation)[7],Wang和Parkan提出的最大差距最小化模型(minimax disparity approach)[8-9]. 这类模型为确定OWA权重提供了一种崭新的思路,但

收稿日期:2014-03-04
基金项目:福建省教育厅A类科技项目(JA12273);泉州市科技资助项目(2012Z113,2012Z103)
通信作者:李志伟(1965-),男,福建泉州人,教授,主要从事模糊数学研究. E-mail:wei2785801@qztc.edu.cn

据所查阅的文献,这类模型的目标函数大多为尽可能使所有权重相等,然而很多情况下,处于中间位置的元素往往比其他元素更重要.

综合以上考虑,本文提出了一种基于组合数的权重优化模型. 在第二节介绍了 OWA 算子理论以及一些赋权方法;在第三节提出一种新的基于组合数的 OWA 算子赋权方法, 并证明了这种赋权方法具有的性质. 在第四节通过对学术期刊进行评价,来对本文介绍的权重方法进行介绍.

1 OWA 算子及其赋权方法

1.1 OWA 算子

定义 1 (OWA 算子)[1]. 给定一组权重 $W = (w_1, w_2, \cdots, w_n)$,有序加权平均算子(OWA)是一种从 $R^n \to R$ 的映射:

$$F_W(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} w_i y_i. \tag{1}$$

式中, y_i 是 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 中第 i 大的元素.

从 OWA 算子的定义可以发现, 第 i 种属性的权重与 w_i 没有必然联系, 权重 w_i 仅与按照大小排列后第 i 个位置有关.

定义 2 (权重的 orness 水平) 给定权重 $W = (w_1, w_2, \cdots, w_n)$, 称

$$\text{orness}(W) = \alpha = \sum_{i=1}^{n} \frac{n-i}{n-1} w_i. \tag{2}$$

为 W 的 orness 水平.

显然 orness 水平 $\alpha \in [0,1]$, 且 $\alpha_{\max} = 1$ 代表 W 是一组乐观型估计, $\alpha_{\min} = 0$ 表示 W 是一组悲观型估计, 而 $\alpha_{\text{med}} = 0.5$ 表示 W 是一组无偏估计. 当 α 的取值从 0 变化到 1, $F_W(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的取值也相应地从最小值变化到最大值. 所以 orness 水平是一个恰当的代表乐观程度的度量.

另外一种常见的 W 的度量是 disp 水平, $\text{disp}(W) = -\sum_{i=1}^{n} w_i \ln w_i$,它反映了 W 离散程度的度量.

1.2 OWA 赋权方法

为了取得公平、合理的权重, 很多人提出了不同的权重向量确定方法. 一种应用最广泛, 相对公平合理的赋权方法称为截断均值(trimmed mean). 通过去掉部分极高、极低端的数值, 截断均值抵销了少数极端值的影响.

定义 3 (截断均值赋权法) 给定一组决策数据 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 按照大小顺序重新排列后的数据为 $Y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$, 设定 Y 中最前面和最后面的 m 个元素的权重为 0, 对其余的元素赋予相同的权重 $\frac{1}{n-2m}$. 即截断均值赋权法的权重为

$$W = (w_1, w_2, \cdots, w_n) = \left(0, \cdots, 0, \frac{1}{n-2m}, \cdots, \frac{1}{n-2m}, 0, \cdots, 0\right).$$

比如在 2012 年的伦敦奥运会跳水比赛中规定, 选手的得分等于去掉 2 个最高分, 去掉 2 个最低分后, 剩下 3 个裁判的成绩总和再乘以难度系数. 这种规定相等于采用了权重为 $\left(0, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0\right)$ 的截断均值赋权法.

虽然这种做法被广泛采用, 然而, 这种做法完全抹杀了最大值和最小值可能起到的作用, 忽略了被评价对象可能具有的特殊性. 为了克服这种缺点, 不少学者对此进行改进. 比如基于某些具有对称性的随机变量的密度函数, Xu 和王煜提出了一些权重设置方法, 其中文献[10]给出了基于组合数的权重方法为

$$w_i = \frac{C_{n-1}^{i-1}}{\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k}} = \frac{C_{n-1}^{i-1}}{2^{n-1}}, i = 1, 2, \cdots, n.$$

并证明了这种权重设置法满足若干条重要性质. 这类模型兼顾了最大值, 中间值, 最小值在决策中的作用, 但是却忽略了评价者本身的乐观水平.

相对于以上直接基于函数特征给出权重的做法, 另外一类赋权方法可以称为最优化方法,比如最大熵模型(The maximum entropy)[4],最小偏差模型(minimum variability)[6], 最小二乘差分模型(least square deviation)[7], 最大间距最小化模型 (minimax disparity)模型[8]等. 例如最小二乘离差模型[7]

$$\begin{cases} \min = \sum_{i=1}^{n-1} (w_i - w_{i-1})^2; \\ \text{s.t.} \sum_{i=1}^{n} \frac{n-i}{n-1} w_i = \alpha; \\ \quad \sum_{i=1}^{n} w_i = 1; \\ \quad w_i \geqslant 0; i = 1, 2, \cdots, n. \end{cases} \tag{3}$$

在约定 orness 水平的前提下, 通过优化目标函数来确定权重. 这类方法明确了 orness 水平, 但这类目标函数大多以让所有权重相等为目标,无法对处于重要的位置的元素赋予更高的权重.

2 一种新的 OWA 算子赋权方法

针对以上问题, 本文提出一种类似模型(3)的, 基于组合数的 OWA 算子赋权方法.

$$\begin{cases} \min J_1 = \sum_{i=1}^{n} \left(w_i - \frac{C_{n-1}^{i-1}}{2^{n-1}}\right)^2; \\ \text{s.t.} \sum_{i=1}^{n} \frac{n-i}{n-1} w_i = \alpha; \\ \quad \sum_{i=1}^{n} w_i = 1; \\ \quad w_i \geqslant 0; i = 1, 2, \cdots, n. \end{cases} \tag{4}$$

组合数具有如下优良性质:对于 n 个组合数 C_{n-1}^{0}, $C_{n-1}^{1}, \cdots, C_{n-1}^{n-1}$, 排在越中间的组合数越大, 且这些组合数关于最中间的数完全对称. 这样的性质与截断均值是类似的(中间的数发挥比较大的作用), 并且组合数克服了截断均值完全忽略最大值和最小值的缺点, 而对处于比较中间的值赋予了更多的权重.

对 $n = 5$ 的情况, 不同 orness 水平下, 采用模型(4)的权重计算结果如图 1 所示. 从图中我们不难发现这种权重赋值方法是能够反映乐观水平的, 并且具有某种对称性.

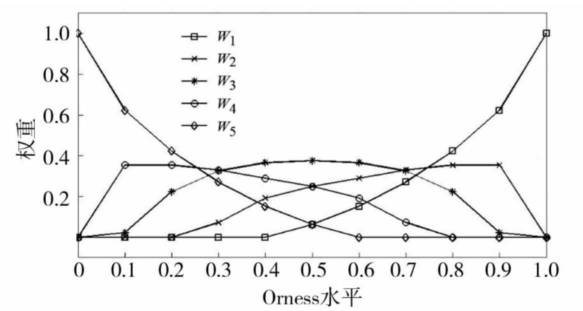

图 1　计算结果

以下证明这个模型所确定的权重具有如下 2 条性质:

性质 1　$W = (1,0,\cdots,0)$, $W = (0,\cdots,0,1)$ 是模型(4)的最优解的充分必要条件分别为 orness 水平为 $\alpha = 1$ 和 $\alpha = 0$.

证明:充分性:当 $W = (1,0,\cdots,0)$ 时, 由式(2)得

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} \frac{n-i}{n-1} w_i = \frac{n-1}{n-1} \times 1 + 0 + \cdots + 0 = 1.$$

必要性:当 $\alpha = 1$ 时, 注意到 $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$, 由式(2)得

$$1 = \alpha = \sum_{i=1}^{n} \frac{n-i}{n-1} w_i = \sum_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{i-1}{n-1}\right) w_i = \sum_{i=1}^{n} w_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{i-1}{n-1} w_i = 1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{i-1}{n-1} w_i.$$

所以

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i-1}{n-1} w_i = \frac{1}{n-1} w_2 + \frac{2}{n-1} w_3 + \cdots + \frac{n-2}{n-1} w_{n-1} = 0.$$

由于 $w_i \geqslant 0$, 所以

$$w_1 = 1, w_2 = w_3 = \cdots = w_{n-1} = 0.$$

证明完毕.

类似地, 也可以证明 $W = (0,\cdots,0,1)$ 的充分必要条件是 $\alpha = 0$.

性质 1 说明, orness 水平在所提出的赋权方法中可以得到完全的表现. 当评价者非常乐观时, $\alpha = 1$, 得到的权重 $(1,0,\cdots,0)$ 说明综合得分将只考虑最大值. 相反, 当评价者非常悲观时, $\alpha = 0$, 得到的权重 $(0,0,\cdots,1)$ 将只考虑各项得分的最小值.

定义 4 (对称模型) 称

$$\begin{cases} \min J_2 = \sum_{i=1}^{n} \left(w_i - \frac{C_{n-1}^{i-1}}{2^{n-1}} \right)^2; \\ \text{s.t.} \sum_{i=1}^{n} \frac{n-i}{n-1} w_i = 1 - \alpha; \\ \sum_{i=1}^{n} w_i = 1; \\ w_i \geqslant 0; i = 1,2,\cdots,n. \end{cases} \tag{5}$$

为模型(4)的对称模型(orness 水平为 $1 - \alpha$).

性质 2(对称性)　设 $W = (w_1, w_2, \cdots w_n)$ 是 orness 水平为 α 下模型(4)的最优解, 则 $(w_n, w_{n-1}, \cdots w_1)$ 是其对称模型的最优解.

证明:给定 orness 水平 α, 令 $\tilde{w}_i = w_{n-i+1}$, 则对于任意一个 $W = (w_1, w_2, \cdots, w_n)$, 总存在一个 $\tilde{W} = (\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \cdots, \tilde{w}_n)$ 与其形成一一对应关系. 考虑到 $C_{n-1}^{i-1} = C_{n-1}^{n-i}$, 所以

$$J_1(W) = \sum_{i=1}^{n-1} \left(w_i - \frac{C_{n-1}^{i-1}}{2^{n-1}} \right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\tilde{w}_{n-i+1} - \frac{C_{n-1}^{n-i+1}}{2^{n-1}} \right)^2 = \sum_{j=1}^{n} \left(\tilde{w}_j - \frac{C_{n-1}^{j-1}}{2^{n-1}} \right)^2 = J_2(\tilde{W}). \quad (j = n - i + 1)$$

即 W 与 $\tilde{W}$ 之间,每一组具有一一对应关系的点的函数值是相同的. 以下我们说明这样一组具有一一对应关系的点也同时满足各自的约束条件. 如果 W 满足模型(4)的约束条件 $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$, 则

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{w}_i = 1. \tag{6}$$

即, $\tilde{W}$ 也满足模型(5)的相应约束条件, 反之亦然. 如果 W 满足模型(4)的另一个约束条件

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{n-i}{n-1} w_i = \alpha.$$

那么

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} \frac{n-i}{n-1} \tilde{w}_{n-i+1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{i-1}{n-1} \tilde{w}_i = \sum_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{n-i}{n-1}\right) \tilde{w}_i.$$

注意到式(6), 所以

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{n-i}{n-1} \tilde{w}_i = 1 - \alpha. \tag{7}$$

即, $\tilde{W}$ 也满足模型(5)相应的另一个约束条件, 反之亦然. 综上所述,模型(5)与模型(4)的可行域也是一一对应的. 因此, $J_1(W)$ 是模型(4)的最小值, 等价于 $J_2(\tilde{W})$ 是模型(5)的最小值.

3　示例

以下以 10 种出版物的综合评价为例介绍本文

提出的 OWA 赋权方法的应用.

根据文献[11],影响因子、H 指数、SJR 值和 SNIP 值是评价学术期刊的重要指标,其中影响因子又包含基于 JCR 的影响因子 IF(JCR),和基于 Scopus 数据库的影响因子 IF(Scopus). 2005 年 Jorge Hirsch 教授提出 H 指数在中国期刊网学术刊物评价体系占有重要地位,SJR 综合考虑了期刊被引数量和被引质量的指标. 而 SNIP 是衡量期刊影响力的新工具.

文献[11]给出了 48 种刊物的 SNIP 值,SJR 值,H 指数,IF(Scopus)和 IF(JCR)指数. 对各个指标进行归一化,即采用

$$y = \frac{x - x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}}.$$

对所有指标进行[0,1]归一化. 篇幅起见,表 1 列出了 10 种刊物归一化之后的指标值. 采用式(1)对各个刊物的 5 个指标进行 OWA 评价,其中 5 种指标的权重由模型(4)决定. 在各种 orness 水平下,这些刊物的综合评价结果列于表 2. 从表 2 我们发现,如果评价者是比较悲观的,那么第 7 种刊物是比较优秀的,究其原因是因为在各种评价方法下,这个期刊的得分都不算太差. 如果评价者是比较乐观的,那么第 1 种刊物就显得比较优秀,究其原因是因为刊物 1 有多项指标得分较高,虽然也存在多项指标得分较低.

表 1 归一化数据

刊物	SNIP	SJR	H	IF - Scopus	IF - JCR
1	0.26	0.20	0.22	0.83	1.00
2	0.31	0.11	0.51	0.46	0.61
3	0.17	0.15	0.36	0.49	0.55
4	0.26	0.13	0.42	0.41	0.51
5	0.23	0.11	0.22	0.31	0.46
6	0.12	0.12	0.44	0.34	0.43
7	0.38	0.13	0.61	0.47	0.42
8	0.33	0.13	0.49	0.32	0.40
9	0.11	0.10	0.28	0.26	0.36
10	0.25	0.12	0.40	0.30	0.33

表 2 综合评价结果

刊物	$\alpha=0.1$	$\alpha=0.4$	$\alpha=0.5$	$\alpha=0.6$	$\alpha=0.9$
1	0.21	0.35	0.43 *	0.53 *	0.92 *
2	0.19	0.37	0.42	0.47	0.57
3	0.16	0.30	0.34	0.39	0.52
4	0.18	0.33	0.36	0.40	0.48
5	0.15	0.22	0.25	0.29	0.40
6	0.13	0.26	0.30	0.34	0.43
7	0.23 *	0.37 *	0.42	0.46	0.56
8	0.20	0.31	0.34	0.37	0.45
9	0.11	0.20	0.22	0.25	0.33
10	0.17	0.26	0.29	0.31	0.37

* 表示该属性值为所有刊物的最大属性值

4 结论

本文基于组合数的优良性质,提出了一种可以调节乐观水平的,类似与截断平均的 OWA 权重确定方法,并且证明了这种权重具有 2 条优良的性质,即它可以完全反映评价的乐观程度,其计算结果也具备某种对称性. 所提出的模型是一个简单的二次规划模型,因此在计算上是简单而高效的. 这种赋值方法是对文献[10]和文献[6]等所提出来的方法的一个延伸. 最后以出版物的评价为例,介绍了这种方法的使用.

参考文献:

[1] Yager R R. Families OWA operators[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1993, 59(2): 125 - 148.

[2] Ferretti V, Pomarico S. Ecological land suitability analysis through spatial indicators: An application of the analytic network process technique and ordered weighted average approach[J]. Ecological Indicators, 2013 (34): 507 - 519.

[3] Gorsevski P V, Donevska K R, Mitrovski C D, et al. Integrating multi - criteria evaluation techniques with geographic information systems for landfill site selection: A case study using ordered weighted average[J]. Waste Management, 2012, 32(2): 287 - 296.

[4] O' Hagan M. Aggregating template rule antecedents in real - time expert systems with fuzzy set logic[C]// Proceedings of the 22nd Annual IEEE Asilomar Conference on Signals, Systems, Computers. Pacific Grov, CA: IEEE Computer Society Press, 1988.

[5] Fuller R, Majlender P. An analytic approach for obtaining maximal entropy OWA operator weights[J], Fuzzy Sets and Systems, 2001, 124(1): 53 - 57.

[6] Fuller R, Majlender P. On obtaining minimal variability OWA operator weights[J]. Fuzzy Sets System. 2003, 136(2):203 - 215.

[7] Wang Y, Luo Y, Liu X. Two new models for determining OWA operator weights [J]. Computers & Industrial Engineering,2007, 52(2):203 - 209.

[8] Wang Y M, Parkan C. A preemptive goal programming method for aggregating OWA operator weights in group decision making[J]. Information Sciences, 2007, 177 (8): 1867 - 1877.

[9] Liu X. The solution equivalence of minimax disparity and minimum variance problems for OWA operators [J]. International Journal of Approximate Reasoning ,2007, 45 (1): 68 - 81.

[10] 王煜, 徐泽水. OWA 算子赋权新方法[J]. 数学的实践与认识, 2008, 38(3):51 - 61.

[11] 王一华. 基于 IF(JCR) 、IF(Scopus) 、H 指数、SJR 值、SNIP 值的期刊评价研究[J]. 图书情报工作, 2011, 55(16): 144 - 148.