

doi:10.13582/j.cnki.1672-9102.2014.04.013

# 地基中附加应力分布规律分析

王甲春<sup>1</sup>, 陈峰<sup>2</sup>

(1. 厦门理工学院 土木工程系, 福建 厦门 361024; 2. 福建江夏学院 土木工程系, 福建 福州 350108)

**摘要:**通过集中力和均布力作用下地基中附加应力的计算,分析了深度和水平距离对集中力作用下地基中附加应力的影响,计算了矩形面积在均布荷载作用下地基中不同位置处附加应力的分布.结果表明,集中力作用下地基土中的附加应力存在最大值,均布荷载作用下矩形面积内的附加应力随着深度增加而下降,矩形面积外的点的附加应力随深度的增加先增加后减少,存在最大值.

**关键词:**地基;附加应力;集中力;均布力

**中图分类号:**TU470.3

**文献标志码:**A

**文章编号:**1672-9102(2014)04-0065-04

## Analysis of foundation additional stress distribution

WANG Jiachun<sup>1</sup>, CHEN Feng<sup>2</sup>

(1. Department of Civil Engineering, Xiamen Technology University, Xiamen 361024, China;

2. Department of Civil Engineering, Jiangxia University, Fuzhou 350108, China)

**Abstract:** Through concentration and uniform foundation under the force of additional stress calculation, the influence of depth and horizontal distance on additional stress of the ground was analyzed under concentrated force. The additional stress distribution of the rectangle area under uniform load additional soil at different locations was calculated. The results showed that the foundation soil under concentrated force of the additional stress there is a maximum, when uniformly distributed load the additional stress of the points in the area of a rectangle decrease with depth increasing, the additional stress of points outside the rectangle area increase which there is exist maximum with depth.

**Key words:** foundation; additional stress; concentration; uniformly distributed force

附加应力是在外荷载(如建筑物荷载、车辆荷载、填筑路堤、地震荷载等)作用,地基土中产生的应力增量,是引起地基变形的主要原因<sup>[1]</sup>.法国数学家布辛奈斯克(Boussinesq. J. V)1885年,运用弹性力学的方法推出了在半无限空间表面上作用竖向集中力时在弹性体内任意点所引起的应力和应变的解析解,解决了半无限平面受法向集中力作用的问题,该问题称为布辛奈斯克问题,是弹性力学中最有理论价值的结论之一<sup>[2]</sup>.目前多数基础如条形基础、矩形基础、圆形基础等在土体中产生的附加应力和沉降都通过布辛奈斯克方法进行计算<sup>[2-4]</sup>.地基中某点处附加应力的大小与基础底面上分布荷载的分布规

律及其大小、分布面积的几何形状及其大小、所求应力点的空间位置等因素有关<sup>[5-7]</sup>,但是目前的研究没有系统给出地基中附加应力在各影响因素作用下的变化规律.本文通过对集中力和均布力作用下,地基中附加应力的传递规律及特殊位置处附加应力的计算,分析各因素对地基中附加应力的影响规律,明确地基中附加应力的分布特点,有利于深入理解地基中附加应力的分布,对基础设计和地基沉降计算有一定的指导作用.

### 1 集中力作用下地基中的附加应力

根据布辛奈斯克集中力作用下附加应力的

收稿日期:2013-10-18

基金项目:中国博士后基金(20060400284);福建省自然科学基金资助项目(2014J01213);福建省教育厅项目(JA12256,JA12202);厦门市科技计划项目(3502Z20113033)

通信作者:王甲春(1972-),男,吉林镇赉人,博士,副教授,主要从事土工测试与评价研究. E-mail: wjcxsx@sina.com

解<sup>[8-10]</sup>,可以得到任意点  $M(x,y,z)$  的竖向应力的计算公式如图 1 所示.

$$\sigma_z = \frac{3F}{2\pi} \frac{z^3}{(r^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \quad (1)$$

式中,  $\sigma_z$  为  $M$  点的竖向附加应力;  $F$  为集中力;  $r$  为  $M$  点与集中力作用点的水平距离,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ;  $z$  为  $M$  点的竖向深度,  $z \geq 0$ . 根据式(1)对竖向附加应力进行分析,为了便于利用 Matlab 软件数值计算,令  $F = 100$  kN.

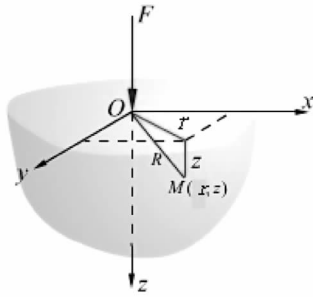


图1 集中荷载

### 1.1 深度 $z$ 对附加应力的影响

当  $r = 0$  时,  $\sigma_z = \frac{3F}{2\pi z^2}$ , 因此  $\lim_{z \rightarrow 0} \sigma_z = \infty$ ,

$\lim_{z \rightarrow \infty} \sigma_z = 0$ ,  $\sigma_z$  随着深度  $z$  增加单调下降.

当  $r \neq 0$  时,  $\sigma_z(z=0) = \frac{3F}{2\pi} \frac{z^3}{(r^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} = 0$ ,

$\lim_{z \rightarrow \infty} \sigma_z = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{3F}{2\pi} \frac{z^3}{(r^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} = 0$ .

可见此时  $z = 0$  时不是奇异点, 当  $\frac{d\sigma_z}{dz} = \frac{3F}{2\pi}$

$\frac{z^3(3r^2 - 2z^2)}{(r^2 + z^2)^{\frac{7}{2}}} = 0$  时,  $z = 0$  或  $z = \sqrt{\frac{3}{2}}r$ . 当  $z =$

$\sqrt{\frac{3}{2}}r$  时,  $\sigma_z$  的最大值为  $\sigma_{z\max} = \frac{3F}{2\pi} \frac{(\frac{3}{2})^{\frac{3}{2}}}{(\frac{5}{2})^{\frac{5}{2}}r^2} =$

$\frac{0.28F}{\pi} \frac{1}{r^2}$ , 因此表明  $\sigma_{z\max}$  随着  $r$  的增加而迅速下降, 如图 2 所示,  $r$  值越小,  $\sigma_{z\max}$  越大, 即在地中  $z =$

$\sqrt{\frac{3}{2}}r$  处存在附加应力最大值, 这是集中力作用下, 地基中附加应力分布的一个重要特点.

### 1.2 $r$ 对附加应力的影响

当  $z$  一定时,  $\sigma_z = \frac{3F}{2\pi} \frac{z^3}{(r^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}$ ,  $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{3F}{2\pi}$

$\frac{z^3}{(r^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} = 0$ , 随着  $r$  增加而下降. 因此  $r = 0$  有

最大值  $\sigma_{z\max} = \frac{3F}{2\pi} \frac{1}{z^2}$ , 因此表明  $\sigma_{z\max}$  随着  $z$  的增加

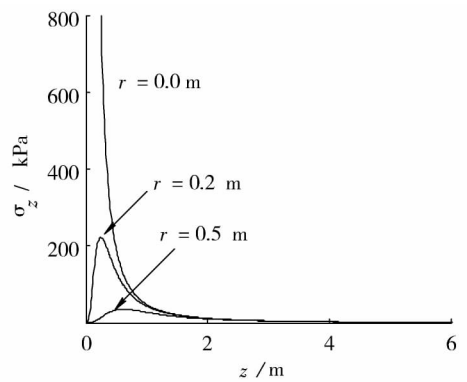


图2 附加应力随  $z$  变化

而迅速下降, 如图 3 所示.

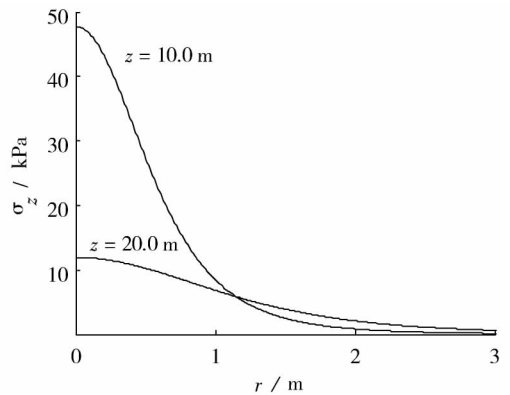


图3 附加应力随  $r$  的变化

### 1.3 集中力作用下附加应力的等值线

从图 4 可以看出集中力在地基中引起的附加应力等值线随着深度的增加而无限扩散, 大小不断减少, 综合反映了  $r$  和  $z$  对附加应力的影响.

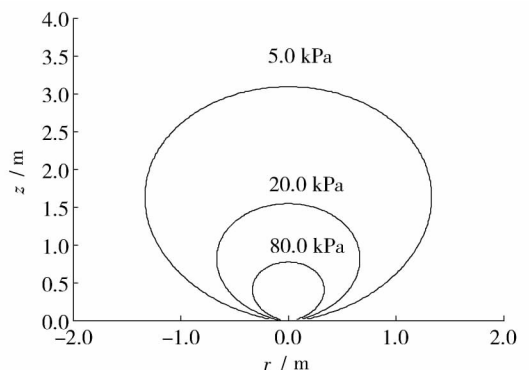


图4 集中力作用下附加应力的等值线

## 2 均布荷载作用下矩形面积地基中的附加应力

均布荷载作用下矩形面积地基中的附加应力计算一般利用布辛奈斯克集中力的公式, 进行积分而求解<sup>[11-13]</sup>, 如图 5 所示, 得到  $M$  点的附加应力计算公式, 如式(2)所示, 可以计算均布荷载  $P_0$  作

用下矩形平面下地基中的附加应力。

$$\sigma_z = \frac{p_0}{2\pi} \left[ \frac{lbz(l^2 + b^2 + 2z^2)}{(l^2 + z^2)(b^2 + z^2)\sqrt{l^2 + b^2 + z^2}} + \arctan\left(\frac{lb}{z\sqrt{l^2 + b^2 + z^2}}\right) \right]. \quad (2)$$

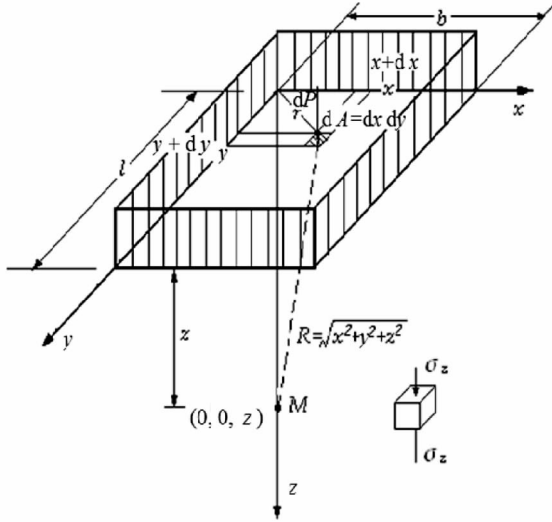


图5 均布荷载作用下的附加应力

### 2.1 l 和 b 对附加应力的影响

矩形平面下任一点 M, 深度为 z, 如图 6 所示, 在平面上的投影为 O. 平面图形分成 I, II, III, IV 4 个矩形, 根据式 (2) 可以列出 M 点的附加应力<sup>[14-15]</sup>如式 (3) 所示。

$$\begin{aligned} \sigma_{zM} = \frac{p_0}{2\pi} & \left\{ \frac{l_y b_x z (l_y^2 + b_x^2 + 2z^2)}{(l_y^2 + z^2)(b_x^2 + z^2)\sqrt{l_y^2 + b_x^2 + z^2}} + \arctan\left(\frac{l_y b_x}{z\sqrt{l_y^2 + b_x^2 + z^2}}\right) \right\} + \\ & \left[ \frac{(l - l_y) b_x z (l - l_y)^2 + b_x^2 + 2z^2}{((1 - l_y)^2 + z^2)(b_x^2 + z^2)\sqrt{z(1 - l_y)^2 + b_x^2 + z^2}} + \arctan\frac{(l - l_y) b_x}{\sqrt{(l - l_y)^2 + b_x^2 + z^2}} \right] + \\ & \left[ \frac{(l - l_y)(b - b_x)z(l - l_y)^2 + (b - b_x)^2 + 2z^2}{((1 - l_y)^2 + z^2)((b - b_x)^2 + z^2)\sqrt{(1 - l_y)^2 + (b - b_x)^2 + z^2}} + \arctan\frac{(l - l_y)(b - b_x)}{z\sqrt{(l - l_y)^2 + (b - b_x)^2 + z^2}} \right] + \\ & \left[ \frac{l_y(b - b_x)z(l_y^2 + (b - b_x)^2 + 2z^2)}{(l_y^2 + z^2)(b - b_x)^2 + z^2)\sqrt{(l_y^2 + (b - b_x)^2 + z^2}} + \arctan\frac{l_y(b - b_x)}{z\sqrt{(l_y^2 + (b - b_x)^2 + z^2}} \right]. \quad (3) \end{aligned}$$

分析  $\sigma_{zM}$  受  $l_y$  和  $b_x$  2 个参数变化的影响, 可以通过数学求导数的方法来确定最大值点, 式 (3) 过于复杂, 求解出极值点实际上有很大的困难, 用

Matlab 绘图的方法表明分析最大值的位置.  $l = 10$  m,  $b = 5$  m,  $P_0 = 100$  kPa, 绘制出  $z = 5$  m 时,  $\sigma_{zM}$  数值的云图如图 7 所示, 可以明显看出, 当  $l_y = 5$  m,  $b_x = 2.5$  m 时  $\sigma_{zM}$  取最大值 48.094 5 kPa, 说明了均布荷载下矩形基础下相同深度处, 矩形平面中心点处的竖向附加应力最大, 把  $b_x = \frac{1}{2}b$ ,  $l_y = \frac{1}{2}l$  代入式 (3) 中, 得到 M 点的附加应力最大值  $\sigma_{zM(\max)}$  为

$$\sigma_{zM(\max)} = \frac{p_0}{2\pi} \left[ \frac{lbz\left(\frac{1}{4}l^2 + \frac{1}{4}b^2 + 2z^2\right)}{\left(\frac{1}{4}l^2 + z^2\right)\left(\frac{1}{4}b^2 + z^2\right)\left(\frac{1}{4}l^2 + \frac{1}{4}b^2 + z^2\right)^{5/2}} + 4\arctan\left(\frac{1}{4}\frac{lb}{z\left(\frac{1}{4}l^2 + \frac{1}{4}b^2 + z^2\right)^{5/2}}\right) \right].$$

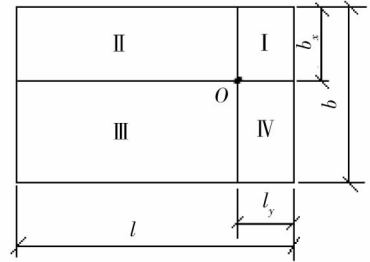


图6 矩形面积示意图

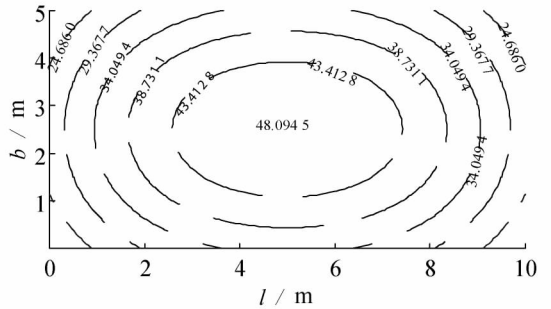


图7 附加应力受平面尺寸的影响 ( $z = 5$  m)

### 2.2 深度 z 对附加应力的影响

当  $z = 0$  时, 矩形面积上的 4 个顶点处的附加应力  $\sigma_z = 0.25 P_0$ , 而 4 个边线上点的附加应力  $\sigma_z = 0.5 P_0$ , 而且矩形面积内任一点处的附加应力  $\sigma_z = 1.0 P_0$ , 如图 8(a) 所示, 附加应力最大值都在  $z = 0$  处, 随着 z 的增加附加应力值迅速下降。

矩形平面外的任一点, 当  $z = 0$  时,  $\sigma_z = 0$ , 随着 z 值的增加  $\sigma_z$  出现一个极值点, 与集中力作用下地基中  $r > 0$  时的附加应力分布情况类似, 如图 8(b) 所示, 说明了土中应力传递的扩散特点。

均布荷载作用下矩形平面附加应力的等值线, 随着深度的增加, 等值线值越来越小, 扩散范围也越来越大, 如图 9 所示。

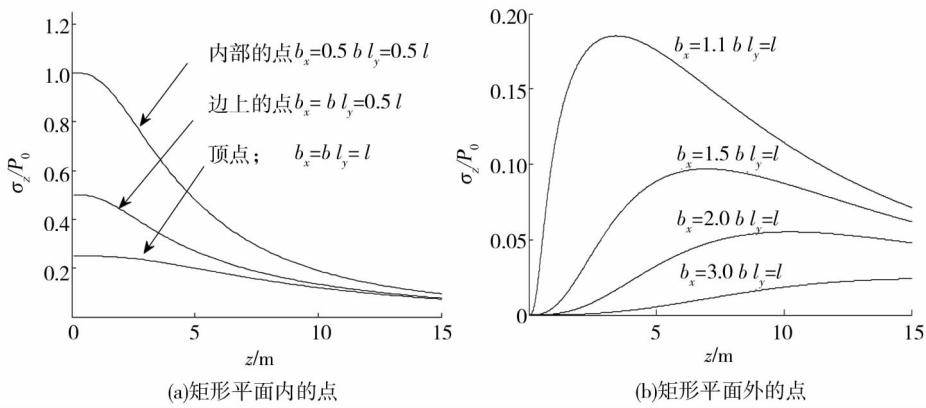


图8 均布荷载下矩形平面附加应力随深度的变化

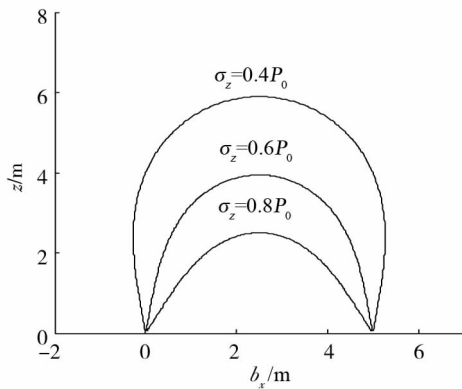


图9 均布荷载下矩形平面附加应力等值线

### 3 结论

1) 集中力作用下, 当  $r = 0$ , 深度  $z = 0$  时, 是奇点, 地基中附加应力无穷大; 当  $r \neq 0$ , 深度  $z = \sqrt{\frac{3}{2}}r$  时, 地基中附加应力存在最大值。

2) 均布荷载作用下, 矩形平面内的点, 当深度  $z = 0$  时, 地基中附加应力值最大, 随着深度的增加地基中附加应力值减少; 矩形平面外的点, 当深度  $z = 0$  时, 地基中附加应力等于 0, 随着深度的增加, 地基中附加应力先增加后减少, 存在最大值。

### 参考文献:

[1] 赵成刚, 白冰, 王运霞. 土力学原理[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.  
 [2] Zekkos D, Kabalan M, Flanagan M. Lessons learned from case histories of dynamic compaction at municipal solid waste sites [J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2013, 139(5): 738 - 751.  
 [3] Ashraf M, Zenkour M N M, Allam M. Sobhy bending of a fiber - reinforced viscoelastic composite plate resting on elastic foundations [J]. Archive of Applied Mechanics, 2011, 81(1): 77 - 96.  
 [4] 吕亚茹, 刘汉龙, 王新泉, 等. 地基附加应力和桩基沉降

计算的修正 Geddes 应力解[J]. 四川大学学报(工程科学版), 2013, 45(2): 68 - 74.

[5] 陈越. 条形均布荷载下横观各向同性弹性地基中附加应力的分布规律[J]. 岩土力学, 1994, 15(4): 1 - 11.  
 [6] Rashed Y F. A boundary/domain element method for analysis of building raft foundations [J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2005, 29(9): 859 - 877.  
 [7] 杨明. 桩土相互作用机理及抗滑加固技术[D]. 成都: 西南交通大学, 2008.  
 [8] Obozov V I, Tolstykh M A. Analysis of the stress - strain state of foundation slabs on soils subject to seismic effects [J]. Soil Mechanics and Foundation Engineering, 2011, 48(1): 28 - 32.  
 [9] Lu M, Xie K, Li C, et al. Consolidation solution for composite foundation considering a time - and depth - dependent stress increment along with three distribution patterns of soil permeability [J]. Journal of Zhejiang University Science A, 2011, 12(4): 268 - 277.  
 [10] Bogomolov A N, Ushakov A N. Calculation of settlements for a strip foundation [J]. Soil Mechanics and Foundation Engineering, 2012, 48(6): 223 - 230.  
 [11] 火映霞, 侯新宇, 陆善佳, 等. 基坑土钉支护边坡有限元稳定性分析方法探讨[J]. 湖南科技大学学报(自然科学版), 2013, 28(1): 58 - 62.  
 [12] 葛占钊, 韩阳军, 张新. 桥台填土引起的基底附加应力的研究[J]. 公路工程, 2011, 36(4): 45 - 50.  
 [13] Benyoucef S, Mechab I, Tounsi A, et al. Bending of thick functionally graded plates resting on winkler - pasternak elastic foundations [J]. Mechanics of Composite Materials, 2010, 46(4): 425 - 434.  
 [14] Korolev K V. Intermediate bearing capacity of saturated bed of strip foundation [J]. Soil Mechanics and Foundation Engineering, 2014, 51(1): 1 - 8.  
 [15] William J L, Rani J. Pore - scale model for water retention and fluid partitioning of partially saturated granular soil [J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2013, 139(5): 724 - 737.