

# 标准拉盖尔高斯光束在非 Kolmogorov 湍流中的平均光强和束宽

肖志强, 龚顺风, 刘明伟

(湖南科技大学 物理与电子科学学院, 湖南 湘潭 411201)

**摘要:** 基于广义惠更斯菲涅尔原理, 通过将拉盖尔高斯光束场方程转化为厄米多项式的形式, 计算得到了在非 Kolmogorov 湍流中传输的平均光强和均方根束宽表达式. 数值结果表明, 光束阶数越大, 波长越长, 传输距离越短, 则归一化平均光强曲线转变为高斯形式越慢, 同时, 湍流幂律指数和内尺度越大, 基模高斯束宽和湍流外尺度越小, 非 Kolmogorov 湍流对标准拉盖尔高斯光束的作用越小.

**关键词:** 广义惠更斯菲涅尔原理; 标准拉盖尔高斯; 非 Kolmogorov 湍流

**中图分类号:** O436      **文献标志码:** A      **文章编号:** 1672-9102(2014)04-0114-05

## Average intensity and beam width of Standard Laguerre Gaussian beams in non - Kolmogorov turbulence

XIAO Zhiqiang, GONG Shunfeng, LIU Mingwei

(School of Physics, Hunan University of Science and Technology, Xiangtan 411201, China)

**Abstract:** Based on extended Huygens - Fresnel principle, the average intensity and the beam width of Standard Laguerre Gaussian beams propagating in non - Kolmogorov turbulence were derived, making use of the Hermite polynomials. Numerical results show that the average intensity profile converts into Gaussian form more slower with larger beam orders and wavelength, or shorter propagating distance. Moreover, the beam width of Standard Laguerre Gauss beams is less affected by non Kolmogorov turbulence with larger turbulent power law exponent and inner scale, or smaller beam width of the fundamental Gaussian mode and outer scale of turbulence.

**Key words:** extended Huygens - Fresnel principle; Standard Laguerre Gaussian; non - Kolmogorov turbulence

作为遥感、追踪定位和远距离光学通信的重要手段, 激光束在自由空间和大气中的传输研究受到了广泛的关注<sup>[1-3]</sup>. 在过去的几十年中, 拉盖尔高斯光束在大气湍流中的传输研究, 都是基于 Kolmogorov 湍流模型. 最近的文章指出, 当激光束在特别稳定的大气湍流中沿垂直方向传输时, Kolmogorov 湍流模型与实验值存在比较大的误差<sup>[4-6]</sup>. 利用广义指数和广义振幅, Toselli 等人引

入了非 Kolmogorov 功率谱模型, 其在对流层和平流层能较好地符合大气湍流特性. 且当幂律指数  $\alpha = 11/3$  时, 非 Kolmogorov 功率谱变为 Kolmogorov 功率谱<sup>[7-9]</sup>. 近来, 已有不少学者对非 Kolmogorov 湍流进行了研究, 极大地推动力该模型的发展: 复宗量拉盖尔高斯在非 Kolmogorov 湍流中的传输<sup>[9]</sup>, 高斯光束阵列的扩展研究<sup>[10]</sup>, 高斯 - 谢尔模光束的扩展和定向<sup>[11]</sup>, 随机电磁光束的二阶统

计<sup>[12]</sup>,部分相干拉盖尔高斯光束的传播因子<sup>[13]</sup>等.

复宗量拉盖尔高斯光束在湍流中的传输受到了广泛的研究,而标准拉盖尔高斯光束却相对研究的较少.本文通过将拉盖尔场方程转换为厄米多项式形式,运用广义的惠更斯菲涅尔原理,同时选取非 Kolmogorov 湍流模型,计算得到了光强和均方根束宽表达式,并做了相应的画图分析.

### 1 平均光强和均方根束宽

在直角坐标系的原平面 ( $z = 0$ ),标准拉盖尔高斯光束的电场分布可以表示为<sup>[3-4,13-14]</sup>

$$E(x,y,0) = \sum_{t=0}^p \sum_{s=0}^q \alpha_{ts} H_m(\sqrt{2}x) H_n(\sqrt{2}y) e^{-(x^2+y^2)}. \quad (1)$$

式中,  $m = q + (2t - s)$ ,  $n = 2p - (2t - s)$ ,  $x \sim \frac{x}{w_0}$ ,

$y \sim \frac{y}{w_0}$ ,  $\alpha_{ts} = \frac{(-1)^p}{2^{2p+q} p!} i^s \binom{p}{t} \binom{q}{s}$ ,  $p$  和  $q$  为拉盖尔多项

式的阶数,  $H_m(\cdot)$  是阶数为  $m$  的厄米多项式,

$\binom{p}{t}$  和  $\binom{q}{s}$  是二次项系数,  $w_0$  为基模高斯光束宽度.当  $p = 0, q = 0$  时,式(1)变为高斯谢尔模光束

电场方程<sup>[4,6]</sup>.

运用广义的惠更斯菲涅尔原理,标准拉盖尔高斯光束在非 Kolmogorov 湍流中传输时,接收面处的平均光强表达式为<sup>[15-18]</sup>

$$\langle I(x',y',z) \rangle = \frac{1}{(\pi z)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E(x_1,y_1,0) E^*(x_2,y_2,0) \times \exp\left[\frac{i}{z}(x_1-x')^2 + \frac{i}{z}(y_1-y')^2\right] \exp\left[-\frac{i}{z}(x_2-x')^2 + \frac{i}{z}(y_2-y')^2\right] \times \langle \exp[\Psi^*(x_2,y_2,x'y')] \rangle dx_1 dx_2 dy_1 dy_2. \quad (2)$$

式中,  $z \sim \frac{z}{z_R}$ ,  $z_R$  为瑞利距离,  $z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$ ,  $\lambda$  是光波

长,  $\langle \cdot \rangle$  为湍流项的系宗平均,其可以表示为<sup>[13-15]</sup>

$$\langle \exp[\Psi(r,r'_1,z) + \Psi^*(r,r'_2,z)] \rangle = \exp\left\{ - \frac{1}{3} \pi^2 k^2 z \int_0^1 \int_0^1 \kappa \Phi_n(\kappa) [1 - J_0(\kappa \xi |r'_1 - r'_2|)] d\kappa d\xi \right\}. \quad (3)$$

$J_0$  为第一类零阶贝塞尔函数,其近似式为<sup>[17]</sup>

$$J_0(\kappa \xi |r'_1 - r'_2|) \sim 1 - \frac{1}{4} (\kappa \xi |r'_1 - r'_2|)^2. \quad (4)$$

$\Phi_n(\kappa)$  为湍流折射率指数空间功率谱,  $\kappa$  是二维空间频率幅值.将式(4)代入式(3),可得:

$$\langle \exp[\Psi(r,r'_1,z) + \Psi^*(r,r'_2,z)] \rangle = \exp\left\{ - \frac{1}{3} \pi^2 k^2 z |r'_1 - r'_2| T \right\}. \quad (5)$$

依据参考文献[15],选取非 Kolmogorov 湍流模型时,式(5)中的  $T$  为

$$T = \frac{\pi^2 A(\alpha) \tilde{C}_n^2}{2(\alpha - 2)} \left\{ \exp\left[\frac{\kappa_0^2}{\kappa_m^2}\right] \kappa_m^{2-\alpha} [2\kappa_0^2 + \kappa_m^2(\alpha - 2)] \Gamma\left(2 - \frac{\alpha}{2}, \frac{\kappa_0^2}{\kappa_m^2}\right) - 2\kappa_0^{4-\alpha} \right\}. \quad (6)$$

式中,  $A(\alpha) = \Gamma(\alpha - 1) \cdot \cos(\alpha\pi/2)/4\pi^2$ ;  $c(\alpha) = [\Gamma(5 - \alpha/2) \cdot A(\alpha) \cdot 2\pi/3]^{1/(\alpha-5)}$ ; 参数  $\kappa_0 = 2\pi/L_0$ ;  $\kappa_m = c(\alpha)/l_0$ ;  $L_0$  为湍流外尺度;  $l_0$  为湍流内尺度;  $\tilde{C}_n^2$  是单位为  $m^{3-\alpha}$  的广义结构参数;  $\Gamma(x)$  则为伽马函数.当  $\alpha = 11/3, A(\alpha) = 0.033, L_0 = \infty, l_0 = 0$  且  $\tilde{C}_n^2 = C_n^2$  时,上式变为普通 Kolmogorov 湍流.

将式(5)代入式(2),计算可得平均光强表达式为

$$\langle I(x',y',z) \rangle = \frac{1}{z^2} \sum_{t_1=0}^p \sum_{s_1=0}^q \sum_{t_2=0}^p \sum_{s_2=0}^q C(m_1, m_2, k_1, k_2, k_3, k_4) C(n_1, n_2, k_5, k_6, k_7, k_8) \alpha_{t_1 s_1} \alpha_{t_2 s_2} \times (x')^{m_1 + m_2 - 2k_1 - 2k_3 - 2k_4} (y')^{n_1 + n_2 - 2k_5 - 2k_7 - 2k_8} e^{-f(x'^2 + y'^2)}. \quad (7)$$

式中,

$$C(m_1, m_2, k_1, k_2, k_3, k_4) = \sum_{k_1=0}^{\lfloor \frac{m_1}{2} \rfloor} \sum_{k_2=0}^{m_1 - 2k_1} \sum_{k_3=0}^{\lfloor \frac{m_2}{2} \rfloor} \sum_{k_4=0}^{m_2 - 2k_3 + k_2} \binom{m_1 - 2k_1}{k_2}$$

$$\beta_{m_1, k_1} \beta_{m_2, k_3} (-1)^{m_1 - 2k_1 - k_2} \frac{(m_2 - 2k_3 + k_2)!}{k_4! (m_2 - 2k_3 + k_2 - 2k_4)!} \times$$

$$2^{\frac{1}{2}(m_1 + m_2) - k_1 - k_3 - 2k_4} T_1^{k_2} A_1^{-1 - 2m_1 - 2m_2 + 2k_1 - 2k_2 + 4k_3 + 4k_4} A_2^{-\frac{1}{2}m_2 - k_2 + 2k_3 + k_4}$$

$$(A_1^2 - 2)^{k_1} \times (A_1^2 - T_1)^{m_2 + k_2 - 2k_3 - 2k_4} \left(\frac{i}{z}\right)^{m_1 + m_2 - 2k_1 - 2k_3 - 2k_4}.$$

$C(n_1, n_2, k_5, k_6, k_7, k_8)$  可用  $C(m_1, m_2, k_1, k_2, k_3, k_4)$  同

样方式表达,且  $\beta_{ij} = (-1)^{i-2j} \frac{i!}{j!(i-2j)!}$ ;  $T_1 =$

$$\frac{4}{3} \pi^4 w_0^4 \lambda^{-3} z T; A_1 = \sqrt{1 - \frac{i}{z} + T_1}; A_2 = 1 + \frac{i}{z} +$$

$$T_1 - \frac{T_1^2}{A_1^2}; f = \frac{(A_1^2 - T_1)^2 + A_1^2 A_2}{z^2 A_1^4 A_2}.$$

作为衡量高斯光束传输特性的重要参数,均方根束宽被广泛采用,在文献[18]中,  $z$  平面均方根束宽定义为

$$W_r(z) = \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} r^2 [I(x',y',z)] dx' dy'}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [I(x',y',z)] dx' dy'}}, \quad (r = x', y'). \quad (8)$$

将式(7)代入式(8),可得标准拉盖尔高斯光束在非 Kolmogorov 湍流中传输的均方根束宽:

$$W_{x'}(z) = W_{y'}(z) = \sqrt{\frac{D_1(z)}{D_2(z)}} \quad (9)$$

式中,

$$D_1(z) = \sum_{l_1=0}^p \sum_{s_1=0}^q \sum_{l_2=0}^p \sum_{s_2=0}^q \alpha_{l_1 s_1} \alpha_{l_2 s_2}^* C(m_1, m_2, k_1, k_2, k_3, k_4) C(n_1, n_2, k_5, k_6, k_7, k_8) \times \frac{\Gamma(m_1 + m_2 - 2k_1 - 2k_3 - 2k_4 + 3)}{2 \sqrt{f^{m_1+m_2-2k_1-2k_3-2k_4+3}}} \frac{\Gamma(n_1 + n_2 - 2k_5 - 2k_7 - 2k_8 + 1)}{2 \sqrt{f^{n_1+n_2-2k_5-2k_7-2k_8+1}}};$$

$$D_2(z) = \sum_{l_1=0}^p \sum_{s_1=0}^q \sum_{l_2=0}^p \sum_{s_2=0}^q \alpha_{l_1 s_1} \alpha_{l_2 s_2}^* C(m_1, m_2, k_1, k_2, k_3, k_4) C(n_1, n_2, k_5, k_6, k_7, k_8) \times \frac{\Gamma(m_1 + m_2 - 2k_1 - 2k_3 - 2k_4 + 1)}{2 \sqrt{f^{m_1+m_2-2k_1-2k_3-2k_4+1}}} \frac{\Gamma(n_1 + n_2 - 2k_5 - 2k_7 - 2k_8 + 1)}{2 \sqrt{f^{n_1+n_2-2k_5-2k_7-2k_8+1}}}.$$

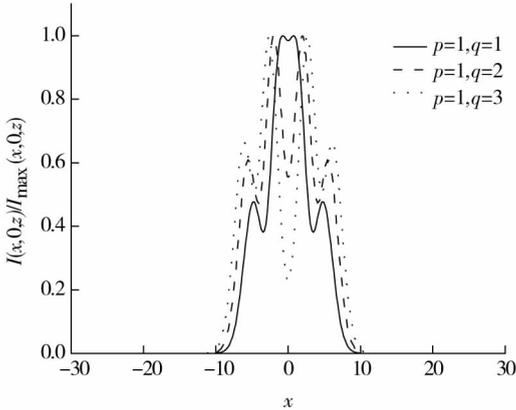
式(7)和式(9)为本文主要的理论结果.

## 2 数据处理与分析

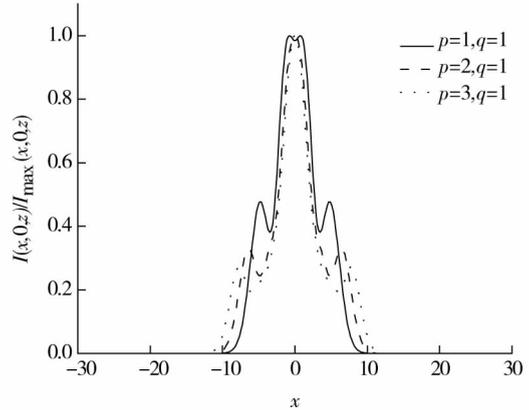
运用上文推导的表达式(7)和式(9),可以对非 Kolmogorov 湍流中标准拉盖尔高斯光束的平均光强和均方根束宽进行研究.

图1显示了非 Kolmogorov 湍流中标准拉盖尔高斯光束的归一化平均光强随光束阶数变化趋势,主要参数为  $z = 3, w_0 = 0.02 \text{ m}, \lambda = 1550 \text{ nm}, l_0 = 0.01 \text{ m}, L_0 = 1 \text{ m}, \alpha = 3.8, \tilde{C}_n^2 = 10^{-14} \text{ m}^{3-\alpha}$ . 从图1中可以看出,随着光束阶数的增大,标准拉盖尔高斯光束曲线变为高斯形式越来越不明显,非 Kolmogorov 湍流对其作用变小.

图2为标准拉盖尔高斯光束在非 Kolmogorov 湍流中传输的归一化平均光强分别与传输距离和波长关系. 其主要参数为  $p = 1, q = 1, w_0 = 0.02 \text{ m}, l_0 = 0.01 \text{ m}, L_0 = 1 \text{ m}, \alpha = 3.8, \tilde{C}_n^2 = 10^{-14} \text{ m}^{3-\alpha}$ , (a)  $\lambda = 1550 \text{ nm}$ , (b)  $z = 3$ . 图2反映出,随着传播距离的增大和入射波长的减小,标准拉盖尔高斯光束曲线转化为高斯形式曲线越快,即受湍流影响越大.

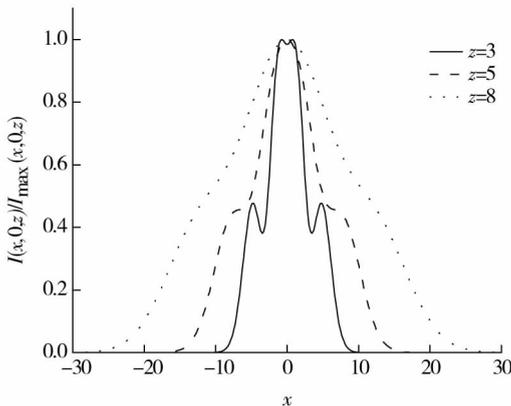


(a) 阶数  $p$  固定,  $q$  变化

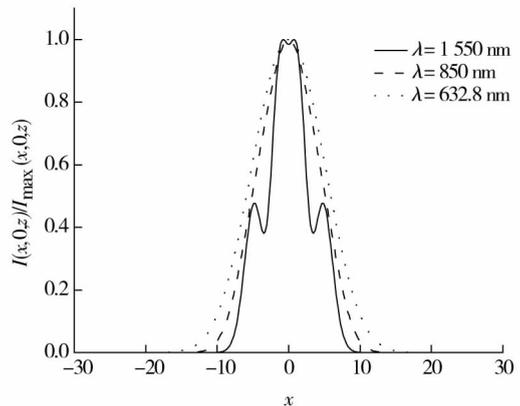


(b) 阶数  $q$  固定,  $p$  变化

图1 非 Kolmogorov 湍流中标准拉盖尔高斯光束的归一化平均光强与阶数的关系



(a) 光束传输距离的影响



(b) 光波波长的影响

图2 非 Kolmogorov 湍流中标准拉盖尔高斯光束的归一化平均光强与传输距离和波长的关系

图3表明了基模高斯束宽和各湍流参数对非 Kolmogorov 湍流中标准拉盖尔高斯光束均方根束宽的影响. 其参数为  $p=1, q=1, \tilde{C}_n^2 = 10^{-14} m^{3-\alpha}, \lambda = 1550 \text{ nm}$ , (a)  $l_0=0.01 \text{ m}, L_0=1 \text{ m}, \alpha=3.8$ ; (b)  $w_0=0.02 \text{ m}, L_0=1 \text{ m}, l_0=0.01 \text{ m}$ ; (c)  $w_0=0.02 \text{ m}, L_0=1 \text{ m}, \alpha=3.8$ ; (d)  $w_0=0.02 \text{ m}, l_0=0.01 \text{ m}, \alpha=3.8$ . 据图可知, 传输距离越大, 光束宽度越大; 同时, 在相同传输距离下, 基模高斯束宽越大, 湍流幂律指数越小, 内尺度越小, 外尺度越大, 则束宽越大. 即更大的湍流幂律指数和内尺度, 更小的基模高斯束宽和湍流外尺度, 可使非 Kolmogorov 湍流对标准拉盖尔高斯光束影响越小.

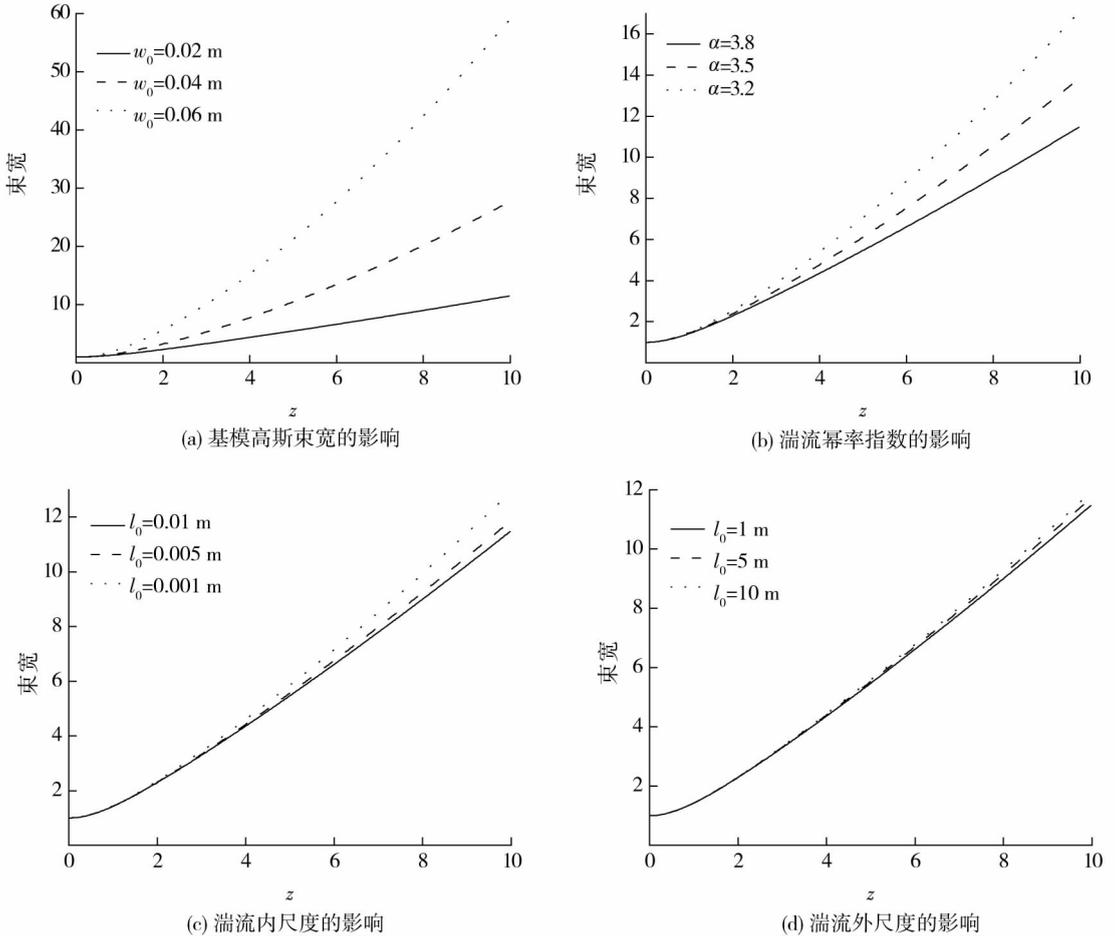


图3 非 Kolmogorov 湍流中标准拉盖尔高斯光束束宽分别与基模高斯束宽、湍流幂率指数、湍流内尺度和湍流外尺度的关系

### 3 结论

本文基于广义惠更斯菲涅尔原理, 通过计算得到了标准拉盖尔高斯光束在非 Kolmogorov 湍流中传输的平均光强和均方根束宽表达式, 并对其进行了相应的数值分析. 结果显示, 标准拉盖尔高斯光束在大气湍流中传输时与光束自身参数和湍流结构参数有很大关系. 当光束阶数越大, 波长越长, 传输距离越短, 则归一化平均光强转变为高斯形式越慢, 受非 Kolmogorov 湍流影响越小. 同时, 湍流幂律指数和内尺度越小, 基模高斯束宽和湍流外尺度越大, 非 Kolmogorov 湍流对标准拉盖尔高斯光束的影响也越小. 此结论具有一定实际指导意义.

### 参考文献:

[1] Wu G H, Luo B, Yu S, et al. Effects of coherence and polarization on the beam spreading and direction through atmospheric turbulence [J]. Optical Communications, 2011, 284(1): 4275 - 4278.

[2] Mei Z R, Zhao D M. The generalized beam propagation factor of truncated standard and elegant Laguerre - Gaussian beams [J]. Applied Optics, 2004, 6(11): 1005 - 1011.

[3] 罗时荣, 吕百达. 截断拉盖尔高斯光束的广义  $M^2$  因子 [J]. Laser Technology, 2004, 28(2): 199 - 201.

- [4] Wang F, Cai Y J, Korotkova O. Partially coherent standard and elegant Laguerre - Gaussian beams of all orders [J]. *Optics Express*, 2009, 17 (25): 22366 - 22379.
- [5] Wu G H, Zhao T G, Ren J H, et al. Beam propagation factor of partially coherent Hermite - Gaussian beams through non - Kolmogorov turbulence [J]. *Optics & Laser Technology*, 2011, 43(7): 1225 - 1228.
- [6] Zilberman A, Golbraikh E, Kopeika N S, et al. Lidar study of aerosol turbulence characteristics in the troposphere: Kolmogorov and non - Kolmogorov turbulence [J]. *Atmospheric Research*, 2008, 88 (1): 66 - 77.
- [7] Zilberman A, Golbraikh E, Kopeika N S. Propagation of electromagnetic waves in Kolmogorov and non - Kolmogorov atmospheric turbulence: three layer altitude model [J]. *Applied Optics*, 2008, 47(63): 85 - 91.
- [8] Toselli I, Andrews L C, Phillips R L, et al. Free - space optical system performance for laser beam propagation through non - Kolmogorov turbulence [J]. *Optical Engineering*, 2008, 47(2): 026003.
- [9] Xu H F, Cui Z F, Qu J. Propagation of elegant Laguerre - Gaussian beam in non - Kolmogorov turbulence [J]. *Optics Express*, 2011, 19(22): 21163 - 21173.
- [10] Zhou P, Ma Y X, Wang X, et al. Average spreading of a Gaussian beam array in non - Kolmogorov turbulence [J]. *Optics Letters*, 2010, 35(7): 1043 - 1045.
- [11] Wu G H, Guo H, Yu S, et al. Spreading and direction of Gaussian - Schell model beam through a non - Kolmogorov turbulence [J]. *Optics Letters*, 2010, 35 (5): 715 - 717.
- [12] Shchepakina E, Korotkova O. Second - order statistics of stochastic electromagnetic beams propagating through non - Kolmogorov turbulence [J]. *Optics Express*, 2010, 18(10): 10650 - 10658.
- [13] Luo H, Xu H F, Cui Z F, et al. Beam propagation factor of partially coherent Laguerre - Gaussian beams in non - Kolmogorov turbulence [J]. *Progress in Electromagnetic Research*, 2012, 22(1): 205 - 218.
- [14] Andrews L C, Phillips R L. *Laser beam propagation through random media* [M]. Bellingham: Society of Photo - Optical Instrumentation Engineers, 2005.
- [15] Eyyuboğlu H T, Baykal Y. Average intensity and spreading of cosh - Gaussian laser beams in the turbulent atmosphere [J]. *Applied Optics*, 2005, 44 (6): 976 - 983.
- [16] Cai Y J, Lin Q, Eyyuboğlu H T, et al. Average irradiance and polarization properties of a radially or azimuthally polarized beam in a turbulent atmosphere [J]. *Optics Express*, 2008, 16(11): 7665 - 7673.
- [17] Shirai T, Dogariu A, Wolf E. Mode analysis of spreading of partially coherent beams propagating through atmospheric turbulence [J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 2003, 20(6): 1094 - 1102.
- [18] Ji X L, Eyyuboğlu H T, Ji G, et al. Influence of turbulence on the effective radius of curvature of radial Gaussian array beams [J]. *Optics Express*, 2010, 18 (17): 6922 - 6928.