第 29 卷 第 4 期　　湖南科技大学学报(自然科学版)　　Vol. 29 No. 4
2014 年　12 月　　Journal of Hunan University of Science & Technology(Natural Science Edition)　　Dec. 2014

doi:10.13582/j.cnki.1672-9102.2014.04.025

# 矩阵方程 $AX=B$ 的正交 $(P,Q)$ -对称解

赵冰艳,张剑尘

(湖南科技大学 数学与计算科学学院,湖南 湘潭 411201)

**摘　要**:定义了正交 $(P,Q)$ -对称矩阵的概念,通过矩阵的正交投影构造了它的结构,针对正交 $(P,Q)$ -对称矩阵的正交不变性,采用直接代入法把问题转化为求矩阵方程组的正交解,利用矩阵的正交三角分解得出了矩阵方程组有正交 $(P,Q)$ -对称解的充分必要条件,及通解的表达式.最后得出矩阵方程 $AX=B$ 有正交 $(P,Q)$ -对称解的充要条件及通解表达式.

**关键词**:正交 $(P,Q)$ 对称解;正交投影;正交三角分解;通解

**中图分类号**:O241.6　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-9102(2014)04-0125-04

# Orthogonal $(P,Q)$ - symmetric solution of matrix equation $AX=B$

Zhao Bingyan, Zhang Jianchen

(School of Mathematics & Computation Science, Hunan University of Science & Technology, Xiangtan 411201, China)

**Abstract**: Puts forward the concept of orthogonal $(P,Q)$ - symmetric matrix, and the structure was constructed through the orthogonal projection. According to the orthogonal invariance of orthogonal $(P,Q)$ - symmetric matrix, The problem was converted to solve orthogonal solutions of matrix equations by adopting direct substitution method. Applying the orthogonal triangular decomposition for matrix , necessary and sufficient conditions were derived and the general expression was gotten for the orthogonal solution to the matrix equations. The necessary and sufficient conditions were derived and the general expression was put forward for the orthogonal $(P,Q)$ - symmetric solution to the matrix equation $AX=B$.

**Key words**: orthogonal $(P,Q)$ - symmetric solution; orthogonal triangular decomposition; orthogonal invariance; general expression

矩阵方程的求解问题一直是数值代数重点研究的领域之一,关于矩阵方程 $AX=B$ 解的一般理论研究,包括解的存在性、唯一性、通解的表达式及数值解法等,已获得一些显著的成果. 1990 年张磊研究出了矩阵方程 $AX=B$ 有正交解的充分必要条件以及通解和最佳逼近的表达式[1],1992 年利用 *Frobenius* 的正交不变性进一步研究了它在正交矩阵集合上的最小二乘问题,并给出了它有正交解的充分必要条件以及通解的表达式[2]. 胡锡炎等给出双对称矩阵逆特征值问题解存在的条件[3], 2004 年盛炎平,谢冬秀. 一类对对称次反对称矩阵反问题解存在的条件[4]. 2005 年周富照等通过奇异值分解给出了矩阵方程 $AX=B$ 的对称正交反对称矩阵反问题的最小二乘解[5]. 2005 年孟纯军,胡锡炎通过 $C-S$ 分解给出了矩阵方程 $AX=B$ 有对称正交解的充分必要条件以及通解的表达式[6]. 类似的研究了矩阵方程 $AX=B$ 的正定解[7],最小二乘问题上的解[8-9] 及正交 $(P,Q)$ - 反对称解[10]. 在此基础上,本文引入正交对称矩阵 $P,Q$,把求矩阵方程 $AX=B$ 的正交 $(P,Q)$ -对称解转化

**收稿日期**:2014-03-23
**基金项目**:湖南科技大学研究生创新基金资助项目(S130030)
**通信作者**:张剑尘(1972-),男,湖南娄底人,博士,副教授,主要从事数值代数的研究. E-mail:jianchenzhang@163.com

为求矩阵方程组的正交解，主要研究以下 3 个问题：

问题 1：给定正交对称矩阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$，在 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{P}+\boldsymbol{I})=\mathrm{rank}(\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{I})$ 的约束条件下构造正交 $(\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q})$ − 对称矩阵的结构.

问题 2：给定 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{R}^{m\times n}$，则矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有正交 $(\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q})$ − 对称解的充分必要条件.

问题 3：给定 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{R}^{m\times n}$，则矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 正交 $(\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q})$ − 对称解的通解表达式.

本文中的矩阵都采用实矩阵，用 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个转置，$\boldsymbol{R}^{m\times n}$ 表示所有 $m\times n$ 实矩阵集合，$\boldsymbol{OR}^{n\times n}$ 表示所有 $n$ 阶实正交矩阵集合，$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩.

设 $\boldsymbol{P}\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$，且 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{I}_n$. 即 $\boldsymbol{P}$ 为正交对称矩阵. 若无特别声明，本文中的 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 为一给定的正交对称矩阵.

## 1 基本概念和相关引理

定义 1 矩阵 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{R}^{m\times n}$，存在非奇异矩阵 $\boldsymbol{R}\in\boldsymbol{R}^{m\times m}$ 和 $\boldsymbol{S}\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$ 使得 $\boldsymbol{RAS}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{-1}\neq\pm\boldsymbol{I},\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{-1}\neq\pm\boldsymbol{I})$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为 $(\boldsymbol{R},\boldsymbol{S})$ − 对称矩阵[11].

引理 1 设 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{R}^{m\times n}$，且 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})=r$，则存在 $m$ 阶正交矩阵 $\boldsymbol{V}$ 和 $n$ 阶正交矩阵 $\boldsymbol{U}$ 使得 $\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{AU}=\begin{bmatrix}\Sigma & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$，其中 $\Sigma=\mathrm{diag}(\sigma_1,\cdots\sigma_r)$，且 $\sigma_1\geqslant\cdots\geqslant\sigma_r>0$[12].

引理 2 给定 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{R}^{m\times n}$，则存在正交矩阵 $\boldsymbol{X}\in\boldsymbol{OR}^{n\times n}$，使得 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{BB}^{\mathrm{T}}$.

引理 3 若有 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{R}^{m\times n}$，且 $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{BB}^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 有如下的正交三角分解，

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{V}\begin{bmatrix}\Sigma & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}};\boldsymbol{B}=\boldsymbol{V}\begin{bmatrix}\Sigma & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}. \tag{1}$$

式中，$\Sigma=\mathrm{diag}(\sigma_1,\cdots\sigma_r)>0$；$r=\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})=\mathrm{rank}(\boldsymbol{B})$；$\boldsymbol{V}\in\boldsymbol{OR}^{m\times m}$；$\boldsymbol{U},\boldsymbol{Q}\in\boldsymbol{OR}^{n\times n}$.

引理 4 给定 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{R}^{m\times n}$，且 $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{BB}^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的正交三角分解如(1)，则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有正交解 $\boldsymbol{X}\in\boldsymbol{OR}^{n\times n}$，且通解为

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{U}\begin{bmatrix}\boldsymbol{I} & 0\\ 0 & \boldsymbol{P}\end{bmatrix}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}};\forall\boldsymbol{P}\in\boldsymbol{OR}^{(n-r)\times(n-r)}. \tag{2}$$

## 2 矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 的正交 $(\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q})$ − 对称解

定义 2 设矩阵 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$，若存在正交对称矩阵 $\boldsymbol{P}\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$ 和 $\boldsymbol{Q}\in\boldsymbol{R}^{n\times n}(\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}\neq\pm\boldsymbol{I})$，使得 $\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{PAQ}=-\boldsymbol{A})$ 且 $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}_n$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为正交 $(\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q})$ − 对称矩阵(正交 $(\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q})$ − 反对称矩阵).

下面讨论正交 $(\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q})$ − 对称矩阵的结构.

记 $\boldsymbol{P}_1=\frac{1}{2}(\boldsymbol{P}+\boldsymbol{I})$；$\boldsymbol{P}_2=\frac{1}{2}(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{I})$；

$$\boldsymbol{Q}_1=\frac{1}{2}(\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{I});\boldsymbol{Q}_2=\frac{1}{2}(\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{I}).$$

易知 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{Q}_1$ 为正投影阵，$\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{Q}_2$ 为负投影阵且

$\boldsymbol{P}_1^2=\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P}_1$；$\boldsymbol{P}_2^2=-\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{P}_2$；$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2=0$；$\boldsymbol{P}_1-\boldsymbol{P}_2=\boldsymbol{I}$；

$\boldsymbol{Q}_1^2=\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{Q}_1$；$\boldsymbol{Q}_2^2=-\boldsymbol{Q}_2^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{Q}_2$；$\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2=0$；$\boldsymbol{Q}_1-\boldsymbol{Q}_2=\boldsymbol{I}$.

若 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{P}_1)=\mathrm{rank}(\boldsymbol{Q}_1)=r$，则 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{P}_2)=\mathrm{rank}(\boldsymbol{Q}_2)=n-r$.

设 $\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{P}_2=-\boldsymbol{U}_2\boldsymbol{U}_2^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{Q}_1=\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{V}_1^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{Q}_2=-\boldsymbol{V}_2\boldsymbol{V}_2^{\mathrm{T}}$. 其中 $\boldsymbol{U}_1,\boldsymbol{V}_1\in\boldsymbol{R}^{n\times r}$；$\boldsymbol{U}_2,\boldsymbol{V}_2\in\boldsymbol{R}^{n\times(n-r)}$ 为列满秩矩阵. 以 $\boldsymbol{U}_1,\boldsymbol{U}_2$ 的列为列做 $n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{U}$；以 $\boldsymbol{V}_1,\boldsymbol{V}_2$ 的列为列做 $n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{V}$.

记 $\boldsymbol{U}=(\boldsymbol{U}_1,\boldsymbol{U}_2)$；$\boldsymbol{V}=(\boldsymbol{V}_1,\boldsymbol{V}_2)$；$\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}\in\boldsymbol{OR}^{n\times n}$

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_2=\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{U}_2\boldsymbol{U}_2^{\mathrm{T}}; \tag{3}$$

$$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}_1+\boldsymbol{Q}_2=\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{V}_1^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{V}_2\boldsymbol{V}_2^{\mathrm{T}}. \tag{4}$$

在 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{P}+\boldsymbol{I})=\mathrm{rank}(\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{I})$ 的前提下，得出以下结论

定理 1 设矩阵 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$ 为正交 $(\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q})$ − 对称矩阵的充分必要条件为

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{U_1V_1} & 0\\ 0 & \boldsymbol{A}_{U_2V_2}\end{bmatrix}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}};\boldsymbol{A}_{U_1V_1}\in\boldsymbol{OR}^{r\times r};$$

$$\boldsymbol{A}_{U_2V_2}\in\boldsymbol{OR}^{(n-r)\times(n-r)}. \tag{5}$$

证：(充分性)对任意的正交矩阵 $\boldsymbol{A}_{U_1V_1},\boldsymbol{A}_{U_2V_2}$，记 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{U_1V_1} & 0\\ 0 & \boldsymbol{A}_{U_2V_2}\end{bmatrix}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}$，由公式(3)，(4)可得

$$\boldsymbol{PAQ}=$$

$$(\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{U}_2\boldsymbol{U}_2^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{U}_1,\boldsymbol{U}_2)\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{U_1V_1} & 0\\ 0 & \boldsymbol{A}_{U_2V_2}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{V}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{V}_2^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}(\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{V}_1^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{V}_2\boldsymbol{V}_2^{\mathrm{T}})=$$

$$(\boldsymbol{U}_1,-\boldsymbol{U}_2)\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{U_1V_1} & 0\\ 0 & \boldsymbol{A}_{U_2V_2}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{V}_1^{\mathrm{T}}\\ -\boldsymbol{V}_2^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=$$

$$(\boldsymbol{U}_1,\boldsymbol{U}_2)\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{U_1V_1} & 0\\ 0 & \boldsymbol{A}_{U_2V_2}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{V}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{V}_2^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=\boldsymbol{A};$$

$$\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{U}_1,\boldsymbol{U}_2)\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{U_1V_1} & 0\\ 0 & \boldsymbol{A}_{U_2V_2}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{V}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{V}_2^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}(\boldsymbol{V}_1,\boldsymbol{V}_2)$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{U_1V_1}^{\mathrm{T}} & 0\\ 0 & \boldsymbol{A}_{U_2V_2}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{U}_2^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=\boldsymbol{I}_n;$$

$$A^{\mathrm T}A=(V_1,V_2)\begin{bmatrix}A_{U_1V_1}^{\mathrm T}&0\\0&A_{U_2V_2}^{\mathrm T}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}U_1^{\mathrm T}\\U_2^{\mathrm T}\end{pmatrix}(U_1,U_2)\begin{bmatrix}A_{U_1V_1}&0\\0&A_{U_2V_2}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}V_1^{\mathrm T}\\V_2^{\mathrm T}\end{pmatrix}=I_n.$$

所以 $A$ 为正交$(P,Q)$-对称矩阵.

(必要性)若 $A$ 为正交$(P,Q)$-对称矩阵,由定义2知 $PAQ=A,AA^{\mathrm T}=A^{\mathrm T}A=I_n$,可得

$$P_1AQ_2+P_2AQ_1=\left(\frac{P+I}{2}A\frac{Q-I}{2}\right)+\left(\frac{P-I}{2}A\frac{Q+I}{2}\right)=$$
$$\frac14(PAQ-PA+AQ-A)+\frac14(PAQ+PA-AQ-A)$$
$$=\frac12(PAQ-A)=0.$$

从而有

$$A=(P_1-P_2)A(Q_1-Q_2)=P_1AQ_1-P_1AQ_2-P_2AQ_1+P_2AQ_2=P_1AQ_1+P_2AQ_2=U_1U_1^{\mathrm T}AV_1V_1^{\mathrm T}+U_2U_2^{\mathrm T}AV_2V_2^{\mathrm T}.$$

令 $A_{U_1V_1}=U_1^{\mathrm T}AV_1$;$A_{U_2V_2}=U_2^{\mathrm T}AV_2$. 可得

$$A=U_1A_{U_1V_1}V_1^{\mathrm T}+U_2A_{U_2V_2}V_2^{\mathrm T}=(U_1,U_2)\begin{bmatrix}AU_1V_1&0\\0&AU_2V_2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}V_1^{\mathrm T}\\V_2^{\mathrm T}\end{pmatrix}=U\begin{bmatrix}AU_1V_1&0\\0&AU_2V_2\end{bmatrix}V^{\mathrm T}.$$

又因为

$$A_{U_1V_1}A_{U_1V_1}{}^{\mathrm T}=A_{U_1V_1}{}^{\mathrm T}A_{U_1V_1}=I_r;$$
$$A_{U_2V_2}A_{U_2V_2}{}^{\mathrm T}=A_{U_2V_2}{}^{\mathrm T}A_{U_2V_2}=I_{n-r}.$$

所以 $A_{U_1V_1}\in OR^{r\times r}$; $A_{U_2V_2}\in OR^{(n-r)\times(n-r)}$. 证毕.

定理2　给定 $A,B\in R^{m\times n}$,则矩阵方程 $AX=B$ 有正交$(P,Q)$-对称解的充分必要条件为

$$AA^{\mathrm T}=BB^{\mathrm T};APA^{\mathrm T}=BQB^{\mathrm T}.\tag{6}$$

证:对任意正交$(P,Q)$-对称矩阵 $X$,由定理1,$X$ 可表示为

$$A=U\begin{bmatrix}A_{U_1V_1}&0\\0&A_{U_2V_2}\end{bmatrix}V^{\mathrm T};$$
$$A_{U_1V_1}\in OR^{r\times r};$$
$$A_{U_2V_2}\in OR^{(n-r)\times(n-r)}.$$

从而

$$AX=B\Leftrightarrow AU\begin{bmatrix}X_{U_1V_1}&0\\0&X_{U_2V_2}\end{bmatrix}V^{\mathrm T}=B\Leftrightarrow$$
$$AU\begin{bmatrix}X_{U_1V_1}&0\\0&X_{U_2V_2}\end{bmatrix}=BV\Leftrightarrow$$
$$A(U_1,U_2)\begin{bmatrix}X_{U_1V_1}&0\\0&X_{U_2V_2}\end{bmatrix}=B(V_1,V_2)\Leftrightarrow$$
$$\begin{cases}AU_1X_{U_1V_1}=BV_1;\\AU_2X_{U_2V_2}=BV_2.\end{cases}$$

所以求矩阵方程 $AX=B$ 的正交$(P,Q)$-对称解等价于求矩阵方程组 $\begin{cases}AU_1X_{U_1V_1}=BV_1;\\AU_2X_{U_2V_2}=BV_2.\end{cases}$ 的正交解.

令 $\overline{A}_1=AU_1\in R^{m\times r}$;$\overline{B}_1=BV_1\in R^{m\times r}$;$\overline{A}_2=AU_2\in R^{m\times(n-r)}$;$\overline{B}_2=BV_2\in R^{m\times(n-r)}$. 则

$$AX=B\Leftrightarrow\begin{cases}\overline{A}_1X_{U_1V_1}=\overline{B_1};\\\overline{A}_2X_{U_2V_2}=\overline{B_2}.\end{cases};$$

$$X_{U_1V_1}\in OR^{r\times r};X_{U_2V_2}\in OR^{(n-r)\times(n-r)}.$$

由引理2知　$X_{U_1V_1}\in OR^{r\times r}$;$X_{U_2V_2}\in OR^{(n-r)\times(n-r)}$存在的充分必要条件为

$$\begin{cases}\overline{A}_1\overline{A}_1{}^{\mathrm T}=\overline{B}_1\overline{B}_1{}^{\mathrm T}\\\overline{A}_2\overline{A}_2{}^{\mathrm T}=\overline{B}_2\overline{B}_2{}^{\mathrm T}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}AU_1U_1^{\mathrm T}A^{\mathrm T}=BV_1V_1^{\mathrm T}B^{\mathrm T};\\AU_2U_2^{\mathrm T}A^{\mathrm T}=BV_2V_2^{\mathrm T}B^{\mathrm T}.\end{cases}\Leftrightarrow$$
$$\begin{cases}APA^{\mathrm T}+AA^{\mathrm T}=BQB^{\mathrm T}+BB^{\mathrm T}\\APA^{\mathrm T}-AA^{\mathrm T}=BQB^{\mathrm T}-BB^{\mathrm T}\end{cases}\Leftrightarrow$$
$$\{AA^{\mathrm T}=BB^{\mathrm T};APA^{\mathrm T}=BQB^{\mathrm T}.$$

所以矩阵方程 $AX=B$ 有正交$(P,Q)$-对称解的充分必要条件为

$$AA^{\mathrm T}=BB^{\mathrm T};APA^{\mathrm T}=BQB^{\mathrm T}.$$

定理3　给定 $A,B\in R^{m\times n}$,且 $AA^{\mathrm T}=BB^{\mathrm T}$;$APA^{\mathrm T}=BQB^{\mathrm T}$. 则矩阵方程 $AX=B$ 有正交$(P,Q)$-对称解且通解表达式为

$$X=U\begin{bmatrix}X_{U_1V_1}&0\\0&X_{U_2V_2}\end{bmatrix}V^{\mathrm T}.\tag{7}$$

其中,

$$X_{U_1V_1}=S_1\begin{bmatrix}I_{r_1}&0\\0&M_1\end{bmatrix}N_1^{\mathrm T};\forall M_1\in OR^{(r-r_1)\times(r-r_1)};\tag{8}$$

$$X_{U_2V_2}=S_2\begin{bmatrix}I_{r_2}&0\\0&M_1\end{bmatrix}N_2^{\mathrm T};\ \forall M_2\in OR^{(n-r-r_2)\times(n-r-r_2)}.\tag{9}$$

$S_1,S_2,N_1,N_2$ 满足定理2证明过程中 $\overline{A}_1,\overline{B}_1,\overline{A}_2,\overline{B}_2$ 的正交三角分解

$$\overline{A}_1=R_1\begin{bmatrix}\Sigma_{r_1}&0\\0&0\end{bmatrix}S_1^{\mathrm T};\overline{B}_1=R_1\begin{bmatrix}\Sigma_{r_1}&0\\0&0\end{bmatrix}N_1^{\mathrm T};\tag{10}$$

$$\overline{A}_2 = R_2\begin{bmatrix} \Sigma_{r_2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}S_2^{T};\overline{B}_2 = R_2\begin{bmatrix} \Sigma_{r_2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}N_2^{T}. \quad (11)$$

其中, $R_1$, $R_2 \in OR^{m\times m}$; $S_1$, $N_1 \in OR^{r\times r}$; $S_2$, $N_2 \in OR^{(n-r)\times(n-r)}$.

证:因为 $A,B \in R^{m\times n}$,且 $AA^{T}=BB^{T}$;$APA^{T}=BQB^{T}$,由定理 2 证明过程可知

$$\begin{cases} AA^{T}=BB^{T}; \\ APA^{T}=BQB^{T}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{A}_1\overline{A}_1^{T} = \overline{B_1B_1}^{T}; \\ \overline{A}_2\overline{A}_2^{T} = \overline{B_2B_2}^{T}. \end{cases}$$

由引理 3 可知$\overline{A}_1,\overline{B}_1,\overline{A}_2,\overline{B}_2$ 可有如下的正交三角分解

$$\overline{A}_1 = R_1\begin{bmatrix} \Sigma_{r_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}S_1^{T};\overline{B}_1 = R_1\begin{bmatrix} \Sigma_{r_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}N_1^{T};$$

$$\overline{A}_2 = R_2\begin{bmatrix} \Sigma_{r_2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}S_2^{T};\overline{B}_2 = R_2\begin{bmatrix} \Sigma_{r_2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}N_2^{T}.$$

式中,

$\mathrm{rank}(\overline{A}_1) = \mathrm{rank}(\overline{B}_1) = r_1$; $\mathrm{rank}(\overline{A}_2) = \mathrm{rank}(\overline{B}_2) = r_2$; $R_1,R_2 \in OR^{m\times m}$; $S_1,N_1 \in OR^{r\times r}$; $S_2,N_2 \in OR^{(n-r)\times(n-r)}$.

由引理 4 可得矩阵方程$\overline{A}_1X_{U_1V_1} = \overline{B_1}$;$\overline{A}_2X_{U_2V_2} = \overline{B_2}$. 可有如下正交解

$$X_{U_1V_1} = S_1\begin{bmatrix} I_{r_1} & 0 \\ 0 & M_1 \end{bmatrix}N_1^{T};X_{U_2V_2} = S_2\begin{bmatrix} I_{r_2} & 0 \\ 0 & M_1 \end{bmatrix}N_2^{T}.$$

式中 $M_1 \in OR^{(r-r_1)\times(r-r_1)}$;$M_2 \in OR^{(n-r-r_2)\times(n-r-r_2)}$.

所以矩阵方程组$\begin{cases} \overline{A}_1X_{U_1V_1} = \overline{B}_1; \\ \overline{A}_2X_{U_2V_2} = \overline{B}_2. \end{cases}$的正交解为

$$\begin{cases} X_{U_1V_1} = S_1\begin{bmatrix} I_{r1} & 0 \\ 0 & M_1 \end{bmatrix}N_1^{T}; \\ X_{U_2V_2} = S_2\begin{bmatrix} I_{r2} & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix}N_2^{T}. \end{cases}$$

由定理 2 证明过程可知求矩阵方程 $AX=B$ 的正交($P$, $Q$) - 对称解等价于求矩阵方程组$\begin{cases} AU_1X_{U_1V_1} = BV_1; \\ AU_2X_{U_2V_2} = BV_2. \end{cases}$的正交解.

所以矩阵方程 $AX=B$ 的正交($P,Q$) - 对称解的通解表达式为(7).

## 3 结论

1)通过正交($P,Q$) - 对称矩阵的正交不变性,利用矩阵的正交投影得出 2 组正交矩阵 $P_1,P_2,Q_1,Q_2$,从而构造出正交($P,Q$) - 对称矩阵的结构即定理 1.

2)把正交($P,Q$) - 对称矩阵代入矩阵方程 $AX=B$,通过相应计算问题转化为求矩阵方程组的正交解,利用矩阵的正交三角分解得出了矩阵方程组有正交($P,Q$) - 对称解的充分必要条件及通解的表达式. 最后得出矩阵方程 $AX=B$ 有正交($P$, $Q$) - 对称解的充要条件及通解表达式.

## 参考文献:


[1] 张磊. 正交矩阵的反问题及其最佳逼近[J]. 湖南数学年刊,1990(2): 122 - 127.

[2] 张磊. 正交变换及其反问题[J]. 湖南数学年刊,1992(1):14 - 19.

[3] 胡锡炎,张磊,谢冬秀. 双对称矩阵逆特征值问题解存在的条件[J]. 计算数学,1998,20(4): 409 - 418.

[4] 盛炎平,谢冬秀. 一类对对称次反对称矩阵反问题解存在的条件[J]. 计算数学,2004,26(1): 73 - 80.

[5] 周富照,胡锡炎. 反对称正交对称矩阵反问题[J]. 数学杂志,2005,25(2):179 - 184.

[6] Meng C J, Hu X Y, Zhang L. The skew - symmetric orthogonal solutions of the matrix equation **AX = B**[J]. Linear Algebra and its Applications, 2005, 402(38): 303 - 318.

[7] Allwright J C. Positive semidefinite matrices: characterization via conical hulls and least - squares solution of a matrix equation[J]. Control Optimal, 1998, 34(26): 537 - 556.

[8] Xie D X, Sheng A P, Hu X Y. The least - squares solutions of inconsistent matrix equation over symmetric and anti - symmetric matrix[J]. Linear Algebra and its Applications,2003,27(16): 589 - 598.

[9] Escalante R, Raydan M. Algorithm for constrained least - squares rectangular matrix problems[J]. Computers Math,1998, 35(6): 73 - 79.

[10] 赵冰艳,张剑尘,关剑成. 一定约束条件下矩阵方程 **AX = B** 的正交(*P*,*Q*) - 反对称解[J]. 湖南理工学院学报,2013,27(2):6 - 10.

[11] Trench W F. Problems for (**R**,**S**) - symmetric and (**R**, **S**) - skew symmetric matrices[J]. Linear Algebra Apple,2004,389(15):23 - 31.

[12] 戴华. 矩阵论[M]. 南京:科学出版社,2001.