doi:10.13582/j.cnki.1672-9102.2015.02.015

准严格关系与码

唐美霞[1],刘宇[1],何勇[2]

(1.南宁职业技术学院 信息工程学院,广西 南宁 530008;2.湖南科技大学 计算机科学与工程学院,湖南 湘潭 411201)

摘　要:定义并确定了自由幺半群上的准严格关系,讨论了所有准严格关系的集合及其若干子集的序性质,并证明了余相容准严格关系的无关语言都是码.

关键词:码;无关集;准严格关系;余相容关系

中图分类号:TP301.1　**文献标志码:**A　**文章编号:**1672-9102(2015)02-0093-06

Quasi-strict relations and codes

Tang Meixia [1], Liu Yu [1], He Yong [2]

(1. School of Information Engineering, Nanning College for Vocational Technology, Nanning 530008, China;
2. School of Computer Science and Engineering, Hunan University of Science and Technology, Xiangtan 411201, China)

Abstract: The concept that quasi-strict relation on free monoids was introduced, a characterization for quasi-strict relations was given, the ordering properties of the set of all quasi-strict relations as well as some subsets of it were exhibited. Moreover, it is proved that the independent languages of co-compatible quasi-strict relations are codes.

Keywords: code; independent set; quasi-strict relation; co-compatible relation

本文涉及的关于字、语言、码以及序理论的基本概念和术语可参阅文献[1-4].

如果 L 是某字母表上的一个不含空字的非空语言,且该字母表上的每个字都最多能以一种方式分解为 L 中的字的连接,则称 L 为一个码.码是信息处理最基本的工具,码论是形式语言学的核心,并常被视为理论计算机科学和组合数学的独立分支.前缀码(特别是霍夫曼编码与 ASCII 码)是应用最广泛的码类.后缀码是前缀码的左-右对偶概念,超码和内缀码都是前缀码和后缀码的公共子类.这些码类都具有重要的理论意义和应用价值,大量文献对它们的代数性质、组合性质和统计特征进行了深入、系统的研究[1-3,5-8].

码的判定和产生是码论的核心问题.注意到某些码类(如前缀码、后缀码、超码和内缀码等)可以定义为自由幺半群上的某个关系的无关语言[2],一个自然的猜测是:是否存在自由幺半群上的某个关系使得所有码恰好就是这个关系的无关语言? Shyr 和 Thierrin[9] 中否认了这个猜测,并引出了一个新的问题:自由幺半群上哪些关系的无关语言是码? 对此问题的研究导致了一系列具有重要理论意义和应用价值的码的产生[9-16].

本文将引入准严格关系的概念,并讨论准严格关系的无关语言与码的关系.第二节将定义并确定准严格关系;第三节将刻画无关语言具有某些特殊性质的准严格关系类的序特征;第四节则将证明余相容的准严格关系的非空无关集都是码.

收稿日期:2015-01-12

基金项目:湖南省科技计划项目(2013FJ4047)

通信作者:何勇(1970-),男,湖南汨罗人,博士,教授,主要研究方向为半群代数理论、形式语言学与码论.E-mail:ynghe@263.net

1 准严格关系

下文所讨论的字和语言都是至少含 2 个字母的字母表 A 上的字和语言,所讨论的关系都是字的集合 A^* 上的关系.空字记为 e,字 w 的长度记为 $|w|$,等于关系记为 Δ.关系 $\leqslant_p$,$\leqslant_s$,$\leqslant_b$,$\leqslant_d$,$\leqslant_c$ 定义如下:

$\leqslant_p=\{(w,v)\in A^*\times A^* \mid v\in wA^*\}$,

$\leqslant_s=\{(w,v)\in A^*\times A^* \mid v\in A^*w\}$,

$\leqslant_b=\{(w,v)\in A^*\times A^* \mid v\in A^*wA^*\}$,

$\leqslant_d=\leqslant_p\cap\leqslant_s$,

$\leqslant_c=\{(w,v)\in A^*\times A^* \mid wv=vw,|w|\leqslant|v|\}$.

关系 $\leqslant_h$ 定义为:$w\leqslant_h v$ 当且仅当存在正整数 n 及字 $w_i,v_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 使得

$w=w_1w_2\cdots w_n,\quad v=v_0w_1v_1w_2\cdots w_nv_n$.

根据文献[2],上述各关系都是偏序关系(其中 $\leqslant_p$,$\leqslant_s$,$\leqslant_b$,$\leqslant_h$ 依次称为前缀序,后缀序,内缀序和嵌入序),它们满足以下条件:

$\leqslant_c\subset\leqslant_d\subset\leqslant_p\subset\leqslant_b\subset\leqslant_h$,

$\leqslant_c\subset\leqslant_d\subset\leqslant_s\subset\leqslant_b\subset\leqslant_h$.

对于关系 σ,如果 L 是一个不含空字的语言且

$$\sigma\cap(L\times L)\subseteq\Delta. \tag{1}$$

就称 L 为一个 σ-无关语言,否则就称 L 为一个 σ-相关语言.记所有 σ-无关语言的集合为 I_σ.因为 I_σ 包含空语言 ϕ 且对交运算封闭,所以它关于包含关系形成一个完全 $\wedge$-半格[9].记 σ 的对称闭包为 $\bar{\sigma}$,即 $\bar{\sigma}=\sigma\cup\sigma^{-1}$,

则显然有 $$I_\sigma=I_{\bar{\sigma}}. \tag{2}$$

关系 $\leqslant_p$,$\leqslant_s$,$\leqslant_h$,$\leqslant_b$ 的非空无关语言都是码,它们依次称为前缀码,后缀码,超码和内缀码[2].对于关系 $\leqslant_d$ 和 $\leqslant_c$ 的无关语言则有下面的结论:

引理 1[2] 关系 $\leqslant_d$ 和 $\leqslant_c$ 的非空无关语言不全是码,但二元语言 $\{w,v\}$ 是一个码当且仅当它是 $\bar{\leqslant}_c$-无关的.

如果关系 σ 满足条件

$$\Delta\cup(\{e\}\times A^*)\subseteq\sigma, \tag{3}$$

$$\{(w,v)\in\sigma \mid |w|=|v|\}\subseteq\Delta. \tag{4}$$

就称 σ 为一个准严格关系.记所有准严格关系的集合为 $\Im$.

定理 1 $\Im$ 就是关系格的区间 $[\Psi,\Phi]$,其中

$\Psi=\Delta\cup(\{e\}\times A^*),\Phi=\Delta\cup\{(w,u)\in A^*\times A^* \mid |w|\neq|u|\}$.

进一步地,对任意的 $\sigma,\tau\in\Im$ 总有 $\bar{\sigma},\bar{\tau}\in\Im$ 且

$$\sigma\subseteq\tau\Rightarrow I_\sigma\supseteq I_\tau, \tag{5}$$

$$\bar{\sigma}\subseteq\bar{\tau}\Leftrightarrow I_{\bar{\sigma}}\supseteq I_{\bar{\tau}}. \tag{6}$$

证明:因为空字 e 是唯一的长度为 0 的字且

$\Delta\cup(\{e\}\times A^*)=\Delta\cup(\{e\}\times(A^*-\{e\}))$,

所以 $\Psi=\Delta\cup(\{e\}\times A^*)\subset\Phi$,

$\Delta=\{(w,v)\in\Psi \mid |w|=|v|\}=\{(w,v)\in\Phi \mid |w|=|v|\}$,

因而 $\Psi,\Phi\in\Im$ 且 $\Psi\subset\Phi$.

如果 $\sigma\in\Im$,则 σ 满足条件(3),即 $\Psi\subseteq\sigma$.对任意的 $(u,v)\in\sigma$,当 $|u|\neq|v|$ 时,当然有 $(u,v)\in\Phi$;当 $|u|=|v|$ 时,由 σ 满足条件(4)可得 $(u,v)\in\Delta\subseteq\Phi$.这就证明了 $\sigma\in[\Psi,\Phi]$.反过来,如果 $\sigma\in[\Psi,\Phi]$,则当然有 $\Psi\subseteq\sigma$,即 σ 必满足条件(3),而由 $\sigma\subseteq\Phi$ 及 $\Phi\in\Im$ 可知 σ 也满足条件(4),因而 $\sigma\in\Im$.这就证明了 $\Im=[\Psi,\Phi]$.

假定 $\sigma,\tau\in\Im$. 则 $\Psi\subseteq\sigma\subseteq\Phi$, 从而

$\Psi\subseteq\sigma\subseteq\bar{\sigma}\subseteq\bar{\Phi}=\Phi$,

因此 $\bar{\sigma}\in\Im$. 同理可证 $\bar{\tau}\in\Im$. 当 $\sigma\subseteq\tau$ 时,对任意的 $L\in I_\tau$ 都有

$\sigma\cap(L\times L)\subseteq\tau\cap(L\times L)\subseteq\Delta$,

从而 $L\in I_\sigma$, 因此式(5)成立.

当 $\bar{\sigma}\subseteq\bar{\tau}$ 时,由于 $\bar{\sigma},\bar{\tau}\in\Im$, 利用式(5)可以断定 $I_{\bar{\sigma}}\supseteq I_{\bar{\tau}}$. 反过来,假定 $I_{\bar{\sigma}}\supseteq I_{\bar{\tau}}$. 对任意的 $(u,v)\in\bar{\sigma}$, 当 $u=v$ 或者 $e\in\{u,v\}$ 时,由 $\Psi\subseteq\bar{\tau}$ 可知必有 $(u,v)\in\bar{\tau}$; 当 $u\neq v$ 且 $e\notin\{u,v\}$ 时,当然有 $\{u,v\}\notin I_{\bar{\sigma}}$, 从而 $\{u,v\}\notin I_{\bar{\tau}}$, 即 $(u,v)\in\bar{\tau}$, 这说明 $\bar{\sigma}\subseteq\bar{\tau}$, 因此式(6)也成立. 证明完毕.

注 1　利用定理 1 容易说明

$\leqslant_p,\leqslant_s,\leqslant_b,\leqslant_d,\leqslant_c,\leqslant_h\in\Im,\quad\bar{\leqslant}_p,\bar{\leqslant}_s,\bar{\leqslant}_b,\bar{\leqslant}_d,\bar{\leqslant}_c,\bar{\leqslant}_h\in\Im.$

尽管 $\bar{\leqslant}_h\not\subseteq\leqslant_s$,但由 $\leqslant_h\subseteq\leqslant_s$ 以及等式(2)和定理 1 可得

$I_{\bar{\leqslant}_h}=I_{\leqslant_h}\supseteq I_{\leqslant_s}$.

这个例子说明:对于准严格关系 σ 和 τ, 一般不能由 $I_\sigma\supseteq I_\tau$ 得到 $\sigma\subseteq\tau$.

2　几类特殊准严格关系的性质

对于关系 σ 和语言 L, 定义 L 的 σ- 跨度为

$$L^\sigma=\begin{cases}\{e\}, & 若\ L\subseteq\{e\},\\ \bigcup_{v\in L\setminus\{e\}}\{u\in A^*\mid u\bar{\sigma}v\}, & 若\ L\not\subseteq\{e\}.\end{cases}$$

单字语言 $\{w\}$ 的跨度也记为 w^σ. 如果对 L 的任意真子集 X 都有 $X^\sigma\neq L^\sigma$, 就称 L 为一个极小 σ- 生成语言. 容易证明

$$(L-\{e\})^\sigma=L^\sigma=L^{\bar{\sigma}}.\tag{7}$$

下面的结论引自文献[9]:

引理 2[9]　对于关系 σ 和语言族 $\{L_i\}_{i\in\Lambda}$ 总有 $(\bigcup_{i\in\Lambda}L_i)^\sigma=\bigcup_{i\in\Lambda}L_i^\sigma$.

定理 2　令 $F_1=\{\sigma\in\Im\mid$ 除 $\{e\}$ 外的极小 σ- 生成语言都是 σ- 无关的$\}$. 则准严格关系 σ 属于 F_1 的充分与必要条件是:

$$(w,v)\in\sigma\Rightarrow[w^\sigma\subseteq v^\sigma\ 或者\ v^\sigma\subseteq w^\sigma].\tag{8}$$

进一步地, F_1 还具有以下性质:

(a) Ψ 是 F_1 的最小元;

(b) $\bar{\leqslant}_p$ 和 $\bar{\leqslant}_s$ 都是 F_1 的极大元;

(c) F_1 对交运算和并运算都不封闭.

证明:假定 $\sigma\in F_1$, 并任取 $(w,v)\in\sigma$. 当 $w=v$ 时,当然有 $w^\sigma\subseteq v^\sigma$. 当 $e=w\neq v$ 时,由 $\sigma\in\Im$ 可以断定 $e\in v^\sigma$, 从而 $w^\sigma=\{e\}\subseteq v^\sigma$. 类似地,当 $e=v\neq w$ 时必有 $v^\sigma=\{e\}\subseteq w^\sigma$. 当 $w\neq v$ 且 $e\notin\{w,v\}$ 时,如果 $w^\sigma\not\subseteq v^\sigma$ 且 $v^\sigma\not\subseteq w^\sigma$, 则由引理 2 可得

$\{w,v\}^\sigma=w^\sigma\cup v^\sigma\notin\{w^\sigma,v^\sigma\}$,

从而 $\{w,v\}$ 是一个 σ- 相关的极小 σ- 生成语言,这与 $\sigma\in F_1$ 相矛盾. 因此,式(8)在任何情形下都成立.

反过来,设 $\sigma\in\Im$ 使得式(8)成立. 如果 $\sigma\notin F_1$, 则存在一个 σ- 相关的极小 σ- 生成语言 $L\neq\{e\}$. 由 L 的 σ- 相关性可以知道 L 中必有 2 个不同字 w,v 满足条件 $(w,v)\in\sigma$, 进而由式(8)有 $w^\sigma\subseteq v^\sigma$ 或者 $v^\sigma\subseteq w^\sigma$. 当 $v^\sigma\subseteq w^\sigma$ 时,利用引理 2 可得

$L^\sigma=(L-\{w,v\})^\sigma\cup w^\sigma\cup v^\sigma=(L-\{w,v\})^\sigma\cup w^\sigma=(L-\{v\})^\sigma$.

当 $w^\sigma\subseteq v^\sigma$ 时,类似可得 $L^\sigma=(L-\{w\})^\sigma$.

这 2 种情形都与 L 是极小 σ- 生成语言相矛盾,因此 $\sigma\in F_1$. 至此就证明了准严格关系 σ 属于 F_1 的充

分与必要条件是式(8)成立. 下面依次证明(a)~(c).

(a) 除 $\{e\}$ 外的 Ψ-极小生成集显然都是 Ψ-无关的,因而 $\Psi \in F_1$. 又因为 F_1 是 $\Im$ 的非空子集,根据定理 1 可知 Ψ 是 F_1 的最小元.

(b) 任取 $(w,v) \in \leqslant_p$ 及 $x \in v^{\leqslant_p}$. 则 $(x,v) \in \leqslant_p$ 或者 $(v,x) \in \leqslant_p$. 容易说明:当 $|x| \leqslant |w|$ 时必有 $x \leqslant_p w$, 而当 $|w| < |x|$ 时必有 $w \leqslant_p x$, 因而总有 $x \in w^{\leqslant_p}$. 这就证明了对任意的 $(w,v) \in \leqslant_p$ 都有 $v^{\leqslant_p} \subseteq w^{\leqslant_p}$, 于是由 F_1 中的关系的刻画式(8)可以断定 $\leqslant_p \in F_1$, 进而再由式(2)和式(7)可得 $\overline{\leqslant}_p \in F_1$.

如果 $\overline{\leqslant}_p$ 不是 F_1 的极大元,则存在 $\sigma \in F_1$ 真包含 $\overline{\leqslant}_p$, 从而存在 2 个不同的非空字 w,v 使得 $(w,v) \in \sigma$ 但 $(w,v) \notin \overline{\leqslant}_p$. 由 $(w,v) \in \sigma$ 和(8)可知

$$v^{\sigma} \subseteq w^{\sigma} \quad 或 \quad w^{\sigma} \subseteq v^{\sigma}. \tag{9}$$

由 $\sigma \in \Im$ 和 $w \neq v$ 还可以断定 $|w| \neq |v|$. 不妨假定 $|w| < |v|$, 并令 $v = ux$, 其中 $|u| = |w|$. 因为 $(w,v) \notin \overline{\leqslant}_p$, 所以 $w \neq u$, 从而 $wx \neq v$. 注意到 $|wx| = |v|$, 这说明 $(wx,v) \notin \bar{\theta}$, 进而由定理 1 可以得到 $(wx,v) \notin \overline{\sigma}$, 即

$$wx \notin v^{\sigma}. \tag{10}$$

另一方面,由 $(w,wx) \in \leqslant_p$ 以及 $\leqslant_p \subseteq \sigma$ 又可以得到 $(w,wx) \in \sigma$, 从而

$$wx \in w^{\sigma}. \tag{11}$$

综合式(9),式(10)和式(11)可以断定

$$v^{\sigma} \subseteq w^{\sigma}. \tag{12}$$

进一步地,因为 $(u,v) \in \leqslant_p \subseteq \sigma$, 所以 $u \in v^{\sigma}$, 从而由式(12)可得 $u \in w^{\sigma}$, 即 $(u,w) \in \sigma$ 或 $(w,u) \in \sigma$. 注意到 $\sigma \in \Im$ 且 $|u| = |w|$, 这将导出与假设条件 $w \neq u$ 相矛盾的等式 $w = u$. 因此, $\overline{\leqslant}_p$ 一定是 F_1 的一个极大元. 类似可证 $\overline{\leqslant}_s$ 也是 F_1 的一个极大元.

(c) 由 $\overline{\leqslant}_p$ 和 $\overline{\leqslant}_s$ 都是 F_1 的极大元可知 $\overline{\leqslant}_p \cup \overline{\leqslant}_s \notin F_1$,

因而 F_1 关于并运算不封闭. 假定 a,b 是 A 中 2 个不同的字母,并令

$$\sigma = \Psi \cup \{(a,a^2),(a,a^3),(a,a^4),(a^2,a^3)\},$$

$$\tau = \Psi \cup \{(a,a^2),(a,a^4),(a^2,a^3),(a^2,a^4),(a^3,a^4)\}.$$

利用 F_1 中的关系的刻画式(8)容易验证 $\sigma,\tau \in F_1$. 直接计算可得 $(a,a^2) \in \sigma \cap \tau$ 以及

$$a^{\sigma\cap\tau} = \{e,a,a^2,a^4\}, (a^2)^{\sigma\cap\tau} = \{e,a,a^2,a^3\}.$$

因为 $a^{\sigma\cap\tau} \nsubseteq (a^2)^{\sigma\cap\tau}$ 且 $(a^2)^{\sigma\cap\tau} \nsubseteq a^{\sigma\cap\tau}$, 所以 $\sigma \cap \tau \notin F_1$, 因而 F_1 关于交运算也不封闭. 证毕.

定理 3 令 $F_2 = \{\sigma \in \Im \mid 所有码都是 \sigma\text{-} 无关的\}$. 则 F_2 恰好就是关系格的区间 $[\Psi, \overline{\leqslant}_c]$, 且是完全格 $\Im$ 的一个序理想.

证明:由 $\overline{\leqslant}_c \in \Im$ 和定理 1 可知关系格的区间 $[\Psi, \overline{\leqslant}_c]$ 是完全格 $\Im$ 的序理想. 任取 $\sigma \in [\Psi, \overline{\leqslant}_c]$. 则当然有 $\sigma \in \Im$. 如果 w,u 是码 L 中的 2 个不同字,那么 $\{w,u\}$ 也是一个码,从而由引理 1 可以知道 $(w,u) \notin \overline{\leqslant}_c$, 进而由 $\sigma \subseteq \overline{\leqslant}_c$ 还可以得到 $(w,u) \notin \sigma$. 这说明所有码都是 σ- 无关的,因此

$$[\Psi, \overline{\leqslant}_c] \subseteq F_2.$$

反过来,设 σ 为 F_2 中的任意关系. 由 $F_2 \subseteq \Im$ 和定理 1 可得 $\Psi \subseteq \sigma$. 对任意的 $(w,u) \in \sigma$, 当 $w = u$ 时自然有 $(w,u) \in \overline{\leqslant}_c$; 当 $w \neq u$ 时,因为二元语言 $\{w,u\}$ 是 σ- 相关的,所以它不是码,从而由引理 1 可以断定 $(w,u) \in \overline{\leqslant}_c$. 这就证明了 $\sigma \subseteq \overline{\leqslant}_c$, 从而

$$F_2 \subseteq [\Psi, \overline{\leqslant}_c].$$

证明完毕.

定理 4　令 $F_3=\{\sigma\in\Im\mid$ 所有 σ- 无关的非空语言都是码$\}$. 则 F_3 是 $\Im$ 的一个滤子,它以 $\leqslant_p$ 和 $\leqslant_s$ 为极小元,对并运算封闭但对交运算不封闭.

证明:由引理 1 和注 1 可知 $\leqslant_p,\leqslant_s\in F_3$ 但

$\leqslant_p\cap\leqslant_s=\leqslant_d\notin F_3$,

这说明 F_3 是 $\Im$ 的一个对交运算不封闭的非空真子集. 进一步地,如果 $\sigma\in F_3,\alpha\in\Im$ 使得 $\sigma\subseteq\alpha$, 则由定理 1 可知 $I_\sigma\supseteq I_\alpha$, 因而 $\alpha\in F_3$. 因此 F_3 是 $\Im$ 的一个滤子,从而对并运算封闭.

下面证明 $\leqslant_p$ 是 F_3 的极小元. 设 σ 是真包含于 $\leqslant_p$ 的一个准严格关系. 则必存在非空字 x,y 使得 $(x,xy)\notin\sigma$. 考虑以下 3 种情形:

(i) 如果 $x=y$, 则 $\{x,x^2\}$ 是 I_σ 中的一个不是码的非空语言.

(ii) 如果 $x\neq y$ 但 $|x|=|y|$, 则由 $\sigma\subseteq\leqslant_p$ 可以断定 $\{x,y,xy\}$ 是 I_σ 中的一个不是码的非空语言.

(iii) 当 $|x|\neq|y|$ 时,容易说明非空语言 $A^{|x|}\cup\{xy\}$ 是 σ- 无关的. 因为 $|(xy)^n|$ 是 n 的倍数,所以 $(xy)^n$ 可以分解为若干个长度为 n 的字的连接,从而 $A^{|x|}\cup\{xy\}$ 不是码.

上述讨论说明了真包含于 $\leqslant_p$ 的准严格关系都不属于 F_3, 因而 $\leqslant_p$ 是 F_3 的一个极小元. 类似可证 $\leqslant_s$ 也是 F_3 的极小元. 证毕.

3　余相容的准严格关系与码

对于关系 σ, 记其的对称闭包 $\bar{\sigma}$ 的补为 $[\sigma]$, 即 $[\sigma]=(A^*\times A^*)-\bar{\sigma}$.

如果对任意字 x_1,x_2,y_1,y_2,z 都有

$(x_1,x_2)\in\sigma\Rightarrow(x_1z,x_2z),(zx_1,zx_2)\in\sigma,\quad(x_1,x_2),(y_1,y_2)\in\sigma\Rightarrow(x_1y_1,x_2y_2)\in\sigma$,

就称 σ 是相容的. 如果 $[\sigma]$ 是相容的,就称 σ 为余相容的. 容易验证:准严格关系 $\leqslant_p,\leqslant_s,\leqslant_h$ 都是余相容的,但 $\leqslant_d$ 不是余相容的.

定理 5　设 σ 为一个关系. 如果 σ 是余相容的,那么 2 个 σ- 无关语言的连接还是 σ- 无关语言. 当 $\Psi\subseteq\sigma$ 时,逆命题也成立.

证明:先证明第一部分. 设 σ 是一个余相容关系, X 和 Y 是 2 个 σ- 无关语言. 对 XY 中任意 2 个不同的字 w,u, 必存在 $x_1,x_2\in X$ 和 $y_1,y_2\in Y$ 使得 $w=x_1y_1$ 且 $v=x_2y_2$. 因为 $w\neq u$, 所以不等式 $x_1\neq x_2$ 与 $y_1\neq y_2$ 中至少有一个成立. 由 X 和 Y 的 σ- 无关性可得:

$x_1\neq x_2\Rightarrow(x_1,x_2)\in[\sigma]$,

$y_1\neq y_2\Rightarrow(y_1,y_2)\in[\sigma]$,

进而由 σ 的余相容性可得 $(w,u)=(x_1y_1,x_2y_2)\in[\sigma]$, 因而 $(w,u)\notin\sigma$. 这就证明了 XY 是 σ- 无关的.

再证明第二部分. 设 σ 是一个包含 Ψ 的关系,且任意 2 个 σ- 无关语言的连接还是 σ- 无关语言. 如果 $(x,y)\in[\sigma]$, 那么 $(x,y)\notin\bar{\sigma}$, 从而 $1\neq x_1\neq y_1\neq 1$,

以至于 $\{x,y\}\in I_{\bar{\sigma}}=I_\sigma$.

假定 x_1,x_2,y_1,y_2,z 为任意字. 如果 $(x_1,x_2)\in[\sigma]$ 且 $z=1$, 则当然有

$(x_1,x_2)=(x_1z,x_2z)=(zx_1,zx_2)\in[\sigma]$;

如果 $(x_1,x_2)\in[\sigma]$ 且 $z\neq 1$, 则 $\{x_1,x_2\},\{z\}\in I_\sigma$, 从而 $\{x_1z,x_2z\},\{zx_1,zx_2\}\in I_\sigma$, 进而

$(x_1z,x_2z),(zx_1,zx_2)\in[\sigma]$.

如果 $(x_1,x_2),(y_1,y_2)\in[\sigma]$, 则 $\{x_1,x_2\}$ 和 $\{y_1,y_2\}$ 都是 σ- 无关语言,从而 $\{x_1y_1,x_1y_2,x_2y_1,x_2y_1\}$ 也是一个 σ- 无关语言. 这说明 $(x_1y_1,x_2y_2)\in I_\sigma$, 即有 $(x_1y_1,x_2y_2)\in[\sigma]$.

因此, σ 是余相容的. 证毕.

推论 1　准严格关系 σ 是余相容的当且仅当任意 2 个 σ- 无关语言的连接还是 σ- 无关语言.

证明:由定理 5 及准严格关系的定义可得.

定理 6　如果 σ 是一个余相容的准严格关系,那么每个 σ- 无关语言都是码.

证明:设 σ- 是一个余相容的准严格关系, X 是一个 σ- 无关语言. 由推论 1 可知 $X^2,X^3,\cdots$ 都是 σ- 无

关语言. 如果 X 不是码,则存在 $a_i, b_j \in X \quad (1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m)$ 使得

$a_1 \neq b_1$, $a_1 a_2 \cdots a_m = b_1 b_2 \cdots b_n$, 从而自然有 $a_2 \cdots a_m \neq b_2 \cdots b_n$.

令 $c_1 = a_2 \cdots a_m b_1 b_2 \cdots b_n, c_2 = b_2 \cdots b_n a_1 a_2 \cdots a_m$.

则 $c_1 \neq c_2$ 但 $a_1 c_1 = b_1 c_2$. 注意到 $c_1, c_2 \in X^{m+n-1}$ 而 $a_1, b_1 \in X$, 由 X 和 X^{m+n-1} 是 σ- 无关语言可以知道 $(a_1, b_1), (c_1, c_2) \in [\sigma]$, 再由 σ 的余相容性可以进一步得到 $(a_1 c_1, b_1 c_2) \in [\sigma]$. 但由 $a_1 c_1 = b_1 c_2$ 和 σ 是准严格关系又可以得到 $(a_1 c_1, b_1 c_2) \notin [\sigma]$ 这个相反论断. 因此 X 一定是一个码. 证毕.

参考文献:

[1] Berstel J, Perrin D. Theory of codes[M]. New York: Academic Press, 1985.

[2] Shyr H J. Free monoids and languages[M]. Taichung: Hon Min Book Company, 2001.

[3] Yu S S. Languages and codes[M]. Taichung: Tsang Hai Book Publishing Company, 2005.

[4] Birkhoff G. Lattice theory[M]. New York: American Mathematics Society Colloqume Publication, 1967.

[5] Tang M X, Wang Z X, He Y. A note on prefix codes[J]. Southeast Asian Bulletin of Mathematics, 2012, 36: 715 - 720.

[6] Wang Z X, Liang F X, He Y. Semiring structures of some classes of hypercodes[J]. Journal of Automata, Languages and Combinatorics, 2009, 14: 259 - 272.

[7] Shyr H J, Thierrin G. Codes and binary relations[J]. Lecture Notes on Mathematics, 1977, 586: 180 - 188.

[8] Jürgensen H, Yu S S. Relations on free monoids, their independent sets and codes[J]. International Journal of Computer Mathematics, 1991, 40: 17 - 46.

[9] Hsiao H K, Yeh Y T, Yu S S. Dependences related to strict binary relations[J]. Theoretical Computer Science, 2005, 347: 306 - 324.

[10] Lam N H. Maximal independent sets in certain subword orders[J]. Semigroup Forum, 1999, 31.

[11] 李有梅,徐宗本,孙建永. 一类求解最大独立集问题的混合神经演化算法[J]. 计算机学报, 2003, 26: 1538 - 1545.

[12] Van D L, Hung K V, Huy P T. Codes and length - increasing transitive binary relations[J]. Lecture Notes in Computer Science, 2005, 3722: 29 - 48.

[13] Ang T, Brzozowski J A. Languages convex with respect to binary relations and their closure properties [J]. Acta Cybern, 2009, 19:445 - 464.

[14] Cao C H, Geng J R, Yang D, Sha L. Homomorphisms preserve some languages related to prefix codes[J]. Communications in Computer and Information Science, 2011, 163: 257 - 262.

[15] Jürgensen H, Konstantinidis S. The hierarchy of codes[J]. Lecture Notes in Computer Science, 1993, 710: 50 - 68.

[16] Fan C M , Huang C C, Shyr H J. Regular autodense languages[J]. Acta Information, 2008, 45: 467 - 477.