第30卷 第2期 湖南科技大学学报(自然科学版) Vol.30 No.2
2015年 6月 Journal of Hunan University of Science & Technology(Natural Science Edition) Jun. 2015

doi:10.13582/j.cnki.1672-9102.2015.02.020

一类奇异抛物方程非负古典解的存在性

夏莉[1],张园园[2]

(1.广东财经大学 数学与统计学院,广东 广州 510320;2.西南财经大学 证券与期货学院,四川 成都 611130)

摘 要:一类含梯度项的奇异抛物方程在文中得到了讨论.在某些特定条件下,通过抛物正则化方法及上下解方法,作者获得该类方程的非负古典解的存在性.

关键词:存在性;奇异抛物方程;径向解

中图分类号:O175.26 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-9102(2015)02-0124-05

Nonnegative classical solutions for some singular parabolic equations

Xia Li[1], Zhang Yuanyuan[2]

(1. School of Mathematics and Statistics, Guangdong University of Finance and Economics, Guangzhou 510320, China;
2. School of Securities and Futures, Southwestern University of Finance and Economics, Chengdu 611130, China)

Abstract: Some singular parabolic equations with gradient term were discussed. Under certain conditions, existence of nonnegative classical solutions for the equations was obtained by parabolic regularization method and sub-super solution method.

Keywords: existence; singular parabolic equation; radial solution

1 背景介绍

考虑下面一类抛物方程:

$$y_t - y'' - \lambda \frac{y'}{r} + \mu \frac{|y'|^l}{y^m} = g(r,t), \quad (r,t) \in Q_T. \tag{1}$$

满足如下初边值条件:

$$y(0,t) = y(1,t) = 0, \quad t \in (0,T]. \tag{2}$$

$$y(r,0) = \xi(r), \quad r \in (0,1). \tag{3}$$

这里 $Q_T = (0,1) \times (0,T]$, T,λ,μ,l,m 均为正数.

式(1)~式(3)与如下一类抛物方程密切相关:

$$\begin{aligned} & y_t - \Delta y + \mu \frac{|\nabla y|^l}{y^m} = g(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_T, \\ & y|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \in (0,T], \\ & y(x,0) = \xi(x), \quad x \in \Omega. \end{aligned} \tag{4}$$

这里 $\Omega_T = \Omega \times (0,T]$, $\Omega \subset R^N (N \geqslant 2)$ 是一个具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域.实际上,当 $\lambda = N-1$, $\Omega = B_1$ 为一个单位球时,式(1)~式(3)的解形式上是问题(4)的径向解,此时 $r = |x|$.

收稿日期:2015-03-30

基金项目:国家自然科学基金资助项目(11201311, 11301345);四川省教育厅一般项目(15ZB0473)

通信作者:张园园(1986-),女,重庆人,博士,副教授,主要从事时间序列及应用数学研究. E-mail:yyzhang@swufe.edu.cn

问题(4)近几年得到很多关注. 当 $\lambda = \mu = 0$ 时, 该问题非平凡解的存在性等得到了证明,参见文献[1-2]. 当 $l = 2, m = 1$ 时, 该问题古典解的存在性、唯一性及最大弱解的存在性,解的渐近行为获得了证明,参见文献[3-4]. 当 $l = 2, 1 \leqslant m < 2$ 时, 周文书及雷沛东[5]证明了问题(4)在一维空间中多个弱解的存在性. 当 $l = 2, m > 0$ 时, 文献[6]研究了上述问题的弱解在 $t \to \infty$ 时的渐近行为. 在 2014 年,I. D. Bonis 及 D. Giachetti [7] 还证明了 $l = 2, 0 < m < 1$ 且 μ 为一个函数时,问题(4)有界弱解的存在性.

当 $l = 2, m \in [1,2)$ 时, 问题(1)~(3)古典解的存在性及唯一性在文献[8]中得到了证明. 本文将较文献[8]讨论更一般的方程(1), 研究问题(1)~(3)在 $m < l < \min\{m+1, 2m\}$ $(l \leqslant 2)$ 或 $m + 1 < l \leqslant \min\{2, 2m\}$ 时非负古典解的存在性.

全文中, 用记号 $d((r_1,t),(r_2,s)) := (|r_1 - r_2|^2 + |s - t|)^{\frac{1}{2}}$ 来计算 Hölder 常数. 并记 $\overline{Q}_T = [0,1] \times [0,T]$, $\alpha = \dfrac{l}{l-m}$, $A \subset\subset B$ 表示 A 是 B 的一个紧子集. 首先给出如下假设条件:

(H1)　$0 < g \in C^{\gamma,\gamma/2}(\overline{Q}_T)$, 这里及后面的 $\gamma \in (0,1)$ 为某个正数.

(H2)　$\xi \in C^{2+\gamma}(0,1)$, 当 $r \in (0,1)$ 时 $\xi > 0, \xi(0) = \xi(1) = 0$, 且 $\max\limits_{[0,1]} |\xi'| < \infty$.

(H3)　$m > 0, l \in (0,2]$, 且 $m < l < \min\{m+1, 2m\}$ 或 $m + 1 < l \leqslant 2m$.

(H4)　$\lambda > 0$, 当 $m + 1 < l \leqslant 2m$ 时, $\mu > L \overset{\Delta}{=} \dfrac{\lambda + \alpha - 1}{\alpha^{l-1}}$; 当 $m < l < \min\{m+1, 2m\}$ 时, $\mu > \inf\limits_{s \geqslant 1} G(s)$, 这里 $G:(0, +\infty) \to R$ 定义如下:

$$G(s) = s^{m-l+1}\alpha^{1-l}(\lambda + \alpha - 1)\cdot[\max_{[0,T]} h(t)]^{m-l+1} + s^{m-l}\alpha^{-l}\cdot\max_{Q_T} g\cdot[\min_{[0,T]} h(t)]^{m-l}.$$

(H5)　$\dfrac{C_1}{2^\alpha}h^\alpha(0)(r - r^2)^\alpha \leqslant \xi \leqslant C_2 h(0)\min\{r^\alpha, (1-r)^\alpha\}$.

(H6)　$\lambda \in [0,1), \mu > 0, \dfrac{C_1}{2^\alpha}h^\alpha(0)(r - r^2)^\alpha \leqslant \xi \leqslant \dfrac{C_3}{2-\lambda}h(0)\cdot r^{1-\lambda}(1-r)$.

上述条件及后文中 $h(t) \in C^1[0,T]$, 对任意 $t \in [0,T], h'(t) > 0, h(t) \geqslant 1$. $0 < C_1 \leqslant \dfrac{1}{2}, C_2, C_3 \geqslant 1$ 分别是引理 1~引理 3 中的常数.

本文主要结果为

定理 1　在假设条件(H1)~(H5)下, 问题(1)~(3)至少存在一个非负解 $y \in C^{2,1}((0,1)\times[0,T]) \cap C(\overline{Q}_T)$ 满足:

$$\frac{C_1}{2^\alpha}h^\alpha(t)(r - r^2)^\alpha \leqslant y \leqslant C_2 h(t)\min\{r^\alpha, (1-r)^\alpha\}, (r,t) \in Q_T,$$

这里 $C_1 \leqslant \dfrac{1}{2}, C_2 \geqslant 1$ 分别是引理 1 和引理 2 中的常数. 并且对所有 $t \in [0,T], y'(0,t) = y'(1,t) = 0$.

定理 2　在假设条件(H1)~(H3)及(H6)下, 问题(1)~(3)至少存在一个正解 $y \in C^{2,1}((0,1)\times[0,T]) \cap C(\overline{Q}_T)$ 满足:

$$\frac{C_1}{2^\alpha}h^\alpha(t)(r - r^2)^\alpha \leqslant y \leqslant \frac{C_3}{2-\lambda}h(t)\cdot r^{1-\lambda}(1-r), (r,t) \in Q_T.$$

这里 $C_1 \leqslant \dfrac{1}{2}, C_3 \geqslant 1$ 分别是引理 1 和引理 3 中的常数.

2　主要结果及证明

由于方程(1)在点 $r = 0$ 及 $y(r,t) = 0$ 具有奇异性, 先将其正则化为

$$y_{\delta t} - y_\delta'' - \lambda\frac{y_\delta'}{r + \delta^{1/\alpha}} + \mu\frac{|y_\delta'|^l}{(y_\delta + \delta^2)^m} = g(r,t), \quad y_\delta \geqslant 0, (r,t) \in Q_T. \tag{5}$$

$$y_\delta(0,t) = y_\delta(1,t) = 0, \quad t \in (0,T]. \tag{6}$$

$$y_\delta(r,0) = \xi(r), \quad r \in (0,1). \tag{7}$$

为使书写简便，记

$$A\zeta = \zeta_t - \zeta'', \quad f_\delta(x,t,\zeta,\eta) = \lambda \frac{\eta}{r + \delta^{\frac{1}{\alpha}}} - \mu \frac{|\eta|^l}{(\zeta + \delta^2)^m} + g(r,t), \quad (r,t) \in Q_T.$$

接下来构造问题(5)~(7)的古典上解和古典下解，首先给出其定义：

定义 1 称 $\bar{y}$ 是初边值问题(5)~(7)的古典上解，如果 $\bar{y} \in C^{1,0}(\bar{Q}_T) \cap C^{2,1}([0,1]\times(0,T])$ 满足：

$$A\bar{y} \geqslant f_\delta(x,t,\bar{y},\bar{y}'), \quad (r,t) \in Q_T,$$
$$\bar{y} \geqslant 0, \quad (r,t) \in [0,1]\times(0,T],$$
$$\bar{y}(r,0) \geqslant \xi(r), \quad r \in [0,1].$$

将上述不等式中不等号反向，可得古典下解 $\underline{y}$ 的定义.

令 $y_0 = \dfrac{1}{2}h(t)(r - r^2)$，显然 y_0 是如下问题的古典解：

$$y_t - y'' = b(r,t), \quad (r,t) \in Q_T,$$
$$y(0,t) = y(1,t) = 0, \quad t \in (0,T],$$
$$y(r,0) = \varphi(r), \quad r \in (0,1).$$

这里 $b(r,t) = h(t) + \dfrac{1}{2}h'(t)(r - r^2)$，$\varphi(r) = \dfrac{1}{2}h(0)(r - r^2)$. 注意到，对任意 $(r,t) \in Q_T$，都有 $0 \leqslant y_0 \leqslant r \cdot h(t)$；且对任意 $\varepsilon \in (0,\dfrac{1}{2})$，当 $(r,t) \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]\times[0,T]$，都有 $y_0 > 0$.

引理 1 令 $\underline{y} = C_1 y_0^\alpha$，$0 < C_1 \leqslant \dfrac{1}{2}$ 是待定常数. 则 $\underline{y}$ 是问题(5)~(7)的古典下解.

证明：注意到 $\alpha \geqslant 2$，经简单计算可得

$$A\underline{y} - f_\delta(x,t,\underline{y},\underline{y}') = C_1\alpha y_0^{\alpha-1}\cdot b(r,t) - C_1\alpha(\alpha-1)y_0^{\alpha-2}\cdot|y_0'|^2 - C_1\alpha\lambda\cdot\frac{y_0}{r+\delta^{1/\alpha}}\cdot y_0^{\alpha-2}y_0' +$$
$$\mu\cdot\frac{|C_1\cdot\alpha y_0^{\alpha-1}y_0'|^l}{(C_1y_0^\alpha+\delta^2)^m} - g(r,t) \leqslant C_1\alpha y_0^{\alpha-1}\cdot b(r,t) + C_1\alpha\lambda\cdot h(t)\cdot y_0^{\alpha-2}|y_0'| + C_1^{l-m}\cdot\mu\cdot\alpha^l\cdot|y_0'|^l - g(r,t).$$

当 $m + 1 < l \leqslant 2m$ 时，先取 $C_1 \leqslant \dfrac{1}{2}$. 由 $C_1^{l-m} < C_1$ 及(H4)，再选取适当正数 $C_1 \leqslant \min\left\{\dfrac{1}{2}, M_{l,m}\right\}$，则 $\underline{y}$ 必是问题(5)~(7)的古典下解. 这里 $M_{l,m}$ 是一个正数，定义为

$$M_{l,m} = \min_{\bar{Q}_T} g\cdot[\max_{\bar{Q}_T}(\alpha y_0^{\alpha-1}b(r,t) + \lambda\alpha h(t)y_0^{\alpha-2}|y_0'| + \mu\alpha^l\cdot|y_0'|^l)]^{-1}.$$

同理，当 $m < l < \min\{m+1, 2m\}$ 时，选取常数 $C_1 = \min\left\{\dfrac{1}{2}, M_{l,m}{}^{\frac{1}{l-m}}\right\}$，则 $\underline{y}$ 是问题(5)~(7)的古典下解.

引理 2 假设(H4)~(H5)成立，令 $y_{1\delta} = C_2h(t)\cdot(r+\delta^{1/\alpha})^\alpha$，$y_{2\delta} = C_2h(t)\cdot(1+\delta^{1/\alpha}-r)^\alpha$. 取 $\bar{y} = \min\{y_{1\delta}, y_{2\delta}\}$，这里 $\delta \in (0,\delta_0)$，δ_0 是某个比 1 小的正数. 则 $\bar{y}$ 是问题(5)~(7)的古典上解.

证明：由定义 1，只需证明：

$$Ay_{i\delta} \geqslant f_\delta(x,t,y_{i\delta},y_{i\delta}'), \quad i = 1,2.$$

先选取 $C_2 \geqslant 1$. 由于 $\delta \leqslant C_2h(t)\cdot(r+\delta^{1/\alpha})^\alpha = y_{1\delta}$，$\alpha = \dfrac{l}{l-m} \geqslant 2(l \in (m,2m])$，则

$$Ay_{1\delta} - f_\delta(x,t,y_{1\delta},y_{1\delta}') = C_2h'(t)(r+\delta^{1/\alpha})^\alpha - C_2\alpha(\lambda+\alpha-1)h(t)(r+\delta^{1/\alpha})^{\alpha-2} + C_2^{l-m}\mu\alpha^l\cdot h^{l-m}(t)\cdot$$
$$\frac{(y_{1\delta})^m}{(y_{1\delta}+\delta^2)^m} - g \geqslant -C_2\alpha(\lambda+\alpha-1)h(t)(1+\delta^{1/\alpha})^{\alpha-2} + C_2^{l-m}\mu\alpha^l\cdot h^{l-m}(t)\cdot(1+\delta)^{-m} - \max_{\bar{Q}_T} g = -C_2\alpha(\lambda +$$
$$\alpha-1)h(t) + C_2^{l-m}\mu\alpha^l\cdot h^{l-m}(t) - \max_{\bar{Q}_T} g + e_\delta(t),$$

这里 $e_\delta(t) = C_2\alpha h(t)(\lambda+\alpha-1)[1-(1+\delta^{1/\alpha})^{\alpha-2}] + C_2^{l-m}\mu\alpha^l\cdot h^{l-m}(t)[(1+\delta)^{-m}-1]$.

由于 $h(t)$ 及 $h^{l-m}(t)$ 在 $[0,T]$ 上一致有界. 故，对任意 $t\in[0,T]$，当 $\delta\to 0$ 时，都有 $e_\delta(t)\to 0$. 又类似于文献[9]中函数 g(s)的讨论，易证得存在某个正数 $C_2\geqslant 1$，使得 $G(C_2)<\mu$. 因此，当 $m<l<\min\{m+1,2m\}$ 时，选取这个常数 C_2，并取某个 $\delta_0\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，则当 $\delta\in(0,\delta_0)$ 时，对任意 $(r,t)\in Q_T$，都有

$$Ay_{1\delta}-f_\delta(x,t,y_{1\delta},y_{1\delta}')\geqslant C_2^{l-m}\alpha^l h^{l-m}(t)(\mu-G(C_2))+e_\delta(t)>0.$$

当 $m+1<l\leqslant 2m$ 时，对任意 $\delta\in(0,\delta_0)$ 及任意 $(r,t)\in Q_T$，都有

$$Ay_{1\delta}-f_\delta(x,t,y_{1\delta},y_{1\delta}')\geqslant C_2^{l-m}\alpha^l h^{l-m}(t)(\mu-L))+e_\delta(t)>0.$$

用类似方法可以证得 $Ay_{2\delta}-f_\delta(x,t,y_{2\delta},y_{2\delta}')>0$ 也成立. 引理 2 得证.

引理 3　假设(H6)成立，令 $\bar{y}=C_3h(t)\cdot Y_\delta$，这里 $Y_\delta=\frac{1}{2-\lambda}(r+\delta^{1/\alpha})^{1-\lambda}(1-r)$，$C_3\geqslant 1$ 是待定常数. 则 $\bar{y}$ 是问题(5)~(7)的古典上解.

证明：显然 Y_δ 是下面问题的古典解：

$$-((r+\delta^{1/\alpha})^\lambda y')'=1,\quad r\in[0,1],$$

$$y(0)=\frac{1}{2-\lambda}\delta^{\frac{1-\lambda}{\alpha}},y(1)=0. \tag{8}$$

由式(8)可得：

$$[A\bar{y}-f_\delta(x,t,\bar{y},\bar{y}')]\cdot(r+\delta^{1/\alpha})^\lambda\geqslant\left[\bar{y}-\bar{y}''-\lambda\frac{\bar{y}'}{r+\delta^{1/2}}-g(r,t)\right]\cdot(r+\delta^{1/\alpha})^\lambda=C_3h'(t)Y_\delta\cdot(r+\delta^{1/2})^\lambda-C_3h(t)((r+\delta^{1/2})^\lambda\cdot Y_\delta')'-g(r,t)\cdot(r+\delta^{1/\alpha})^\lambda\geqslant C_3h(t)-g(r,t)\cdot(r+\delta^{1/\alpha})^\lambda.$$

选取 $C_3=\max\{1,2^\lambda\cdot\max\limits_{Q_T}(h^{-1}\cdot g)\}$，则 $\bar{y}$ 是问题(5)－(7)的古典上解.

由引理 1~引理 3 及文献[10]中 Theorem 4.5，问题(5)~(7)至少存在一个古典解 $y_\delta\in C^{1,0}(\bar{Q}_T)\cap C^{2,1}([0,1]\times(0,T])$，并且

$$\underline{y}\leqslant y_\delta\leqslant\bar{y},(r,t)\in Q_T. \tag{9}$$

引理 4　存在某个常数 $\theta\in(0,1)$，使得

$$\|y_\delta\|_{C^{2+\theta,1+\theta/2}(\overline{Q'_T})}\leqslant M,$$

这里 $Q_T'=[\varepsilon,1-\varepsilon]\times(0,T]$，$\varepsilon\in(0,1/2)$ 是任意常数，M 不依赖于 δ.

证明：对任意 $Q'_T\subset\subset Q_T$，选取 $Q_{i,T}=[\varepsilon_i,1-\varepsilon_i]\times(0,T](i=1,2,3)$，这里 $\varepsilon<\varepsilon_1<\varepsilon_2<\varepsilon_3<1/2$. 考虑方程

$$y_{\delta t}-y''_\delta=f_\delta(r,t,y_\delta,y_\delta'),\quad(r,t)\in\bar{Q}_{3,T}.$$

由于 $\max\limits_{[0,1]}|\xi'|<\infty$，$|f_\delta(r,t,\xi,\eta)|\leqslant C|\eta|^2+g(r,t)$，这里 C 不依赖于 δ，只依赖于 $\lambda,\mu,\varepsilon_3$，$[\min\limits_{\bar{Q}_T}y_0]^{-m\alpha}$.

由文献[11]中内估计定理(Theorem 3.1，pp.438)，存在一个不依赖于 δ 的正数 K_1，使得

$$\max_{Q_{2,T}}|y_\delta'|\leqslant K_1\max_{Q_{3,T}}y_\delta.$$

由上式，则 $|y_\delta'|$ 在 $\overline{Q_{2,T}}$ 上一致有界. 余下证明类似于文献[4]中定理 2.3 的证明，在此省略.

由引理 4 知，对任意 $\varepsilon\in(0,\frac{1}{2})$ 及 $Q_T'=[\varepsilon,1-\varepsilon]\times(0,T]$，$\|y_\delta\|_{C^{2+\theta,1+\theta/2}(\overline{Q'_T})}$ 是一致有界的. 则由 Arzelá－Ascoli 定理及取对角序列的方法，可得到 $\{y_\delta\}$ 的一个子列，使得该子列在 $C^{2,1}(\overline{Q'_T})$ 范数意义下一致收敛到某个函数 $y\in C^{2,1}((0,1)\times[0,T])$. 再由式(9)，当 $\delta\to 0^+$ 时，对任意 $t\in(0,T]$，都有 $\lim\limits_{r\to 0^+}y=\lim\limits_{r\to 1^-}y=0$. 令 $y(0,t)=y(1,t)=0$，则可得原问题(1)~(3)的解 $y\in C^{2,1}((0,1)\times[0,T])\cap C(\bar{Q}_T)$，且逐点满足式(1)~式(3).

当 $\lambda>0,\mu>L$ 或 $\mu>\inf\limits_{s\geqslant 1}G(s)$ 时，当 $\delta\to 0^+$ 时由式(9)可得

$$\frac{C_1}{2^\alpha}h^\alpha(t)(r-r^2)^\alpha \leqslant y \leqslant C_2h(t)\min\{r^\alpha,(1-r)^\alpha\},\quad (r,t)\in Q_T.$$

由此可得:

$$0 \leqslant y'(0,t) = \lim_{r\to 0^+}\frac{y(r,t)}{r} \leqslant \lim_{r\to 0^+}C_2h(t)\frac{r^\alpha}{r} = 0,$$

$$0 = \lim_{r\to 1^-}C_2h(t)\frac{(1-r)^\alpha}{r-1} \leqslant y'(1,t) = \lim_{r\to 1^-}\frac{y(r,t)}{r-1} \leqslant 0.$$

即, $y'(0,t) = y'(1,t) = 0$. 定理1及定理2证毕.

参考文献:

[1] Yang X X, Shen J H. Three point boundary value problem for second – order differential equations with impulse[J]. Journal of Natural Science of Hunan Normal University, 2010, 33: 12 – 16.

[2] Dai Q Y, Gu Y G, Liu F, et al. Threshold result for semilinear parabolic equations[J]. Journal of Natural Science of Hunan Normal University, 2011, 34: 7 – 15.

[3] Xia L, Liu Q, Yao Z A. Existence of the maximal weak solution for a class of singular parabolic equations[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2012, 387: 439 – 446.

[4] Xia L, Yao Z A. Existence, uniqueness and asymptotic behavior of solutions for a singular parabolic equation[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2009, 358: 182 – 188.

[5] Zhou W S, Lei P D. A one – dimensional nonlinear heat equation with a singular term[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2010, 368: 711 – 726.

[6] Martínez – Aparicio P J, Petitta F. Parabolic equations with nonlinear singularities[J]. Nonlinear Analysis, 2011, 74: 114 – 131.

[7] Bonis I D, Giachtti D. Singular parabolic problems with possibly changing sign data[J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems, Series B, 2014, 19: 2047 – 2064.

[8] Xia L, Li J N. Classical solutions for some singular parabolic equations with gradient term[J]. Journal of Jinan University(Natural. Science &. Medicine Edition), 2014, 35: 564 – 568.

[9] Zhou W S. Positive solutions for a singular second order boundary value problem[J]. Applied Mathematics E – Notes, 2009, 9: 154 – 159.

[10] Amann H. Periodic solutions of semilinear parabolic equations[J]. New York: Nonlinear Analysis, Academic Press, 1978: 1 – 29.

[11] Ladyzenskaja O A, Solonnikov V A, Uralceva N N. Linear and Quasi – linear equations of Parabolic Type[M]. Providence: American mathematical society, 1968.