doi:10.13582/j.cnki.1672-9102.2017.02.011

基于决策向量的分辨矩阵构造方法

黄治国[1],杨清琳[2]

(1.河南工程学院 计算机学院,河南 郑州 451191;2.广西财经学院 现代教育技术部,广西 南宁 530003)

摘 要:Skowron分辨矩阵是代数观点属性约简模型的一种演化,其本质在于保持系统中非冲突对象与其他对象的可分辨关系不变,不能刻画常见的非代数观点属性约简准则.属性约简准则的本质体现为保持决策信息系统的某种特定可分辨特性不发生变化,决策信息系统具有多方面可分辨特性,单一属性约简准则仅能刻画其中某一特性.为将不同的属性约简准则运用统一的分辨矩阵形式加以描述,在定义条件等价类的决策向量基础上,构建了决策向量简化决策系统,进而设计满足不同属性约简准则的分辨矩阵及分辨函数,给出其与对应准则属性约简模型的等价性证明,推理证明与仿真实例说明了该方法的可行性与有效性.

关键词:属性约简;约简准则;决策向量;分辨矩阵

中图分类号:TP18 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-9102(2017)02-0062-08

The Method based on Decision Vector for Generating Discernibility Matrix

Huang Zhiguo[1], Yang Qinglin[2]

(1.School of Computer Science, Henan University of Engineering, Zhengzhou 451191, China;
2.Modern Educational Technology Department, Guangxi University of Finance and Economics, Nanning 530003, China)

Abstract: The attribute reduction model based on Skowron's discernibility matrix is equivalent to attribute reduction model under algebra view. Its essence lies in preserving the discernible information between consistent objects and other objects, but can't describe the attribute reduction criterion of non-algebra view. The essence of attribute reduction criterion is to maintain a certain discernibility characteristic of decision information system, the decision information system has many different discernibility characteristics, and the single attribute reduction criterion only describe one of them. In order to describe different attribute reduction criterions using uniform discernibility matrix, the conception of decision vectors for condition equivalence classes were defined and decision vector discernibility matrix was constructed based on this conception, then the discernibility matrix and discernibility function satisfying different reduction criterion were designed respectively. The equivalence between different reduction criterions and corresponding discernibility matrix was strictly proved. The Reasoning proof and simulation example shows the feasibility and effectiveness of the proposed method.

Keywords: attribute reduction; reduction criterion; decision vector; discernibility matrix

粗糙集理论[1]由波兰数学家Pawlak于1982年提出,它是一种处理不精确、不确定和不完备数据的有效分析理论与方法,现已广泛应用于知识获取、数据挖掘、模式识别、机器学习等众多领域[2].属性约简能够在保持系统可辨识特性前提下删除冗余属性,压缩数据容量减小存储空间,因而一直是粗糙集理论的重要研究内容.

收稿日期:2014-12-03

基金项目:河南省高等学校重点科研资助项目(17A520027);河南工程学院博士基金资助项目(D2013003)

通信作者:黄治国(1978-),男,湖南临湘人,博士,副教授,主要从事数据挖掘、智能计算研究. E-mail:huangzg2020@139.com

约简准则反映了约简属性过程中保持系统特定可分辨信息的特性,决策信息系统具有多方面分类特征,单一属性约简准则仅能刻画其中某一方面.文献[3]对五种属性约简准则作出比较研究,张文修等[4-5]讨论了分布约简、分配约简、最大分布约简与近似约简间相互关系.邓大勇等[6-7]研究了代数观点下约简与信息论观点下约简等各主要约简准则间的关系,证明了信息论观点下的约简等价于代数意义下的 μ-决策约简.Zhou 等[8]详细地比较分析目前已有的各种约简准则,针对不相容决策系统将其归为六类.

苗夺谦等[9]揭示了相对约简目标函数在相容与不相容系统中的关系,依据其共性提出了普适分辨矩阵概念,为研究不同约简准则分辨矩阵奠定了理论基础.文献[10]设计满足代数与信息论观点约简的分辨矩阵,但并未给出满足其他常见约简准则分辨矩阵的构造方法.

本文依据条件等价类定义决策向量,在此基础上定义了一种简化决策系统,进而设计满足不同属性约简准则的分辨矩阵,并给出其正确性证明,以保证利用所设计分辨矩阵求取对应准则属性约简的正确高效,为进一步设计高效属性约简算法奠定了分辨矩阵构造基础.

1　属性约简准则

决策系统是粗糙集理论的基础数据结构,决策系统形式化表示为 $\mathrm{DS}=(\boldsymbol{U},\boldsymbol{C}\cup\boldsymbol{D},V,\rho)$, 其中 $\boldsymbol{U}=\{o_1,o_2,\cdots,o_n\}$ 为非空有限论域;$\boldsymbol{C}$ 为条件属性集,$\boldsymbol{D}$ 为决策属性集,$\boldsymbol{C}\cap\boldsymbol{D}=\varnothing$;$\boldsymbol{V}=\cup_{a\in(\boldsymbol{C}\cup\boldsymbol{D})}\boldsymbol{V}_a$ 为属性值域,其中 $\boldsymbol{V}_a$ 为属性 a 的值域;$\rho:\boldsymbol{U}\times(\boldsymbol{C}\cup\boldsymbol{D})\to V$ 为信息函数,$\rho(o_i,a)$ 表示对象 o_i 在属性 a 上的取值,其中 $o_i\in\boldsymbol{U},a\in(\boldsymbol{C}\cup\boldsymbol{D})$.

约简准则的本质体现为保持系统某种可分辨特性不发生变化,决策信息系统具有多方面可分辨特性,单一属性约简准则仅能刻画其中某一特性.许多研究者对不同约简准则作了大量研究,文献[8]详细地比较分析已有各种约简准则,针对不相容决策系统将其归为 6 类,即绝对属性约简、相对关系属性约简、相对正域属性约简、条件分布属性约简、最大条件分布属性约简、决策值集属性约简.

定义 1　给定决策系统 $\mathrm{DS}=(\boldsymbol{U},\boldsymbol{C}\cup\boldsymbol{D},V,\rho)$,若 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{R}\subseteq\boldsymbol{C})$ 满足:

1) $\mathrm{IND}(\boldsymbol{R})=\mathrm{IND}(\boldsymbol{C})$;

2) $\forall\boldsymbol{R}'\subset\boldsymbol{R},\mathrm{IND}(\boldsymbol{R}')\neq\mathrm{IND}(\boldsymbol{C})$.

则称 $\boldsymbol{R}$ 为决策系统的绝对属性约简.

式中:$\mathrm{IND}(\boldsymbol{R})$为系统的绝对不可分辨关系, $\mathrm{IND}(\boldsymbol{R})=\{(u,v)\in\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{U}:u\in U\wedge v\in U\wedge(\forall a\in\boldsymbol{R}\to\rho(u,a)=\rho(v,a))\}$. 绝对属性约简的约简准则在于,保持条件属性集等价关系导致的商集不变,该约简准则用于不含决策或不考虑决策的属性约简情形.

定义 2　给定决策系统 $\mathrm{DS}=(\boldsymbol{U},\boldsymbol{C}\cup\boldsymbol{D},V,\rho)$, 若 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{R}\subseteq\boldsymbol{C})$ 满足:

1) $\mathrm{IND}(\boldsymbol{R}\mid\boldsymbol{D})=\mathrm{IND}(\boldsymbol{C}\mid\boldsymbol{D})$;

2) $\forall R'\subset\boldsymbol{R},\mathrm{IND}(\boldsymbol{R}'\mid\boldsymbol{D})\neq\mathrm{IND}(\boldsymbol{R}\mid\boldsymbol{D})$.

则称 $\boldsymbol{R}$ 为决策系统的相对关系属性约简.

式中: $\mathrm{IND}(\boldsymbol{R}\mid\boldsymbol{D})$ 为系统的相对不可分辨关系,$\mathrm{IND}(\boldsymbol{R}\mid\boldsymbol{D})=\{(x,y)\in\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{U}\mid(\forall a\in\boldsymbol{R}\to\rho(x,c)=\rho(y,c))\vee\rho(x,d)=\rho(y,d)\}$.相对不可分辨关系 $\mathrm{IND}(\boldsymbol{B}\mid\boldsymbol{D})$ 中任意对象对均具有相同的条件属性值或决策属性值,若其属于 $\mathrm{IND}(B)$,则一定属于 $\mathrm{IND}(\boldsymbol{B}\mid\boldsymbol{D})$,反之不一定成立.

定义 3　给定决策系统 $\mathrm{DS}=(\boldsymbol{U},\boldsymbol{C}\cup\boldsymbol{D},V,\rho)$,若 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{R}\subseteq\boldsymbol{C})$ 满足:

1) $\mathrm{POS}_{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{D})=\mathrm{POS}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{D})$;

2) $\forall\boldsymbol{R}'\subset\boldsymbol{R},\mathrm{POS}_{\boldsymbol{R}'}(\boldsymbol{D})\neq\mathrm{POS}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{D})$.

则称 $\boldsymbol{R}$ 为决策系统的相对正域属性约简.

式中: $\mathrm{POS}_{\boldsymbol{R}}(X)$ 称为决策相对于条件属性 $\boldsymbol{R}$ 的相对正域,是根据知识 $\mathrm{IND}(\boldsymbol{R})$ 判断商集 $\boldsymbol{U}/\mathrm{IND}(\boldsymbol{R})$ 中必定包含于 X 的元素的并,$\mathrm{POS}_{\boldsymbol{R}}(X)=\cup\{X_i:X_i\in\boldsymbol{U}/\mathrm{IND}(\boldsymbol{R})\wedge X_i\subseteq X\}$.相对正域属性约简准则本质在于保持可确定分类的对象集不变,而忽略边界区域的粒度变化.

定义 4　给定决策系统 $\mathrm{DS}=(\boldsymbol{U},\boldsymbol{C}\cup\boldsymbol{D},V,\rho)$,若 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{R}\subseteq\boldsymbol{C})$ 满足:

1) $\forall x \in \boldsymbol{U}, \mu_{\boldsymbol{R}}(x) = \mu_{\boldsymbol{C}}(x)$;

2) $\forall \boldsymbol{R}' \subset \boldsymbol{R}, \exists x \in \boldsymbol{U}$ 使得 $\mu_{\boldsymbol{R}'}(x) \neq \mu_{\boldsymbol{R}}(x)$.

则称 $\boldsymbol{R}$ 为决策系统的条件分布属性约简.

式中:$\mu_{\boldsymbol{R}}(x)$ 为对象 $x \in \boldsymbol{U}$ 在条件属性 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{R} \subseteq \boldsymbol{C})$ 下关于决策属性 D 的条件分布函数, $\mu_{\boldsymbol{R}}(x) = (|D_1 \cap [x]_{\boldsymbol{R}}|/|[x]_{\boldsymbol{R}}|, |D_2 \cap [x]_{\boldsymbol{R}}|/|[x]_{\boldsymbol{R}}|, \cdots, |D_{|\boldsymbol{U}/\mathrm{IND}(\boldsymbol{D})|} \cap [x]_{\boldsymbol{R}}|/|[x]_{\boldsymbol{R}}|)$. 条件分布属性约简准则本质在于保持决策系统中任意对象的条件分布函数不变,即保证了由对象所导出规则的置信度不发生变化,这是知识发现过程中应予考虑的重要特性之一.

定义5　给定决策系统 $\mathrm{DS} = (\boldsymbol{U}, \boldsymbol{C} \cup \boldsymbol{D}, V, \rho)$,若 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{R} \subseteq \boldsymbol{C})$ 满足:

1) $\forall x \in \boldsymbol{U}, \gamma_{\boldsymbol{R}}(x) = \gamma_{\boldsymbol{C}}(x)$;

2) $\forall \boldsymbol{R}' \subset \boldsymbol{R}, \exists x \in U$ 使得 $\gamma_{R'}(x) \neq \gamma_R(x)$.

则称 R 为决策系统的最大条件分布属性约简.

式中:$\gamma_{\boldsymbol{R}}(x)$ 为对象 $x \in \boldsymbol{U}$ 在条件属性 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{R} \subseteq \boldsymbol{C})$ 下关于决策属性 $\boldsymbol{D}$ 的最大隶属决策集, $\gamma_{\boldsymbol{R}}(x) = \{(i, |D_i \cap [x]_{\boldsymbol{R}}|/|[x]_{\boldsymbol{R}}|) : |D_i \cap [x]_{\boldsymbol{R}}|/|[x]_{\boldsymbol{R}}| = \max\{|D_1 \cap [x]_{\boldsymbol{R}}|/|[x]_{\boldsymbol{R}}|, \cdots, |D_{|\boldsymbol{U}/\mathrm{IND}(\boldsymbol{D})|} \cap [x]_{\boldsymbol{R}}|/|[x]_R|\}\}$.最大条件分布属性约简准则本质在于保持系统中任意对象的最大隶属决策集不变,即保证取极大置信度值的规则不发生变化,若在规则获取后设置足够大阈值过滤所得规则集,保持条件分布函数不变与保持条件最大隶属不变可得到相同的结果规则集.

定义6　给定决策系统 $\mathrm{DS} = (\boldsymbol{U}, \boldsymbol{C} \cup \boldsymbol{D}, V, \rho)$, 若 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{R} \subseteq \boldsymbol{C})$ 满足:

(1) $\forall x \in \boldsymbol{U}, \delta_{\boldsymbol{R}}(x) = \delta_{\boldsymbol{C}}(x)$;

(2) $\forall \boldsymbol{R}' \subset \boldsymbol{R}, \exists x \in \boldsymbol{U}$ 使得 $\delta_{\boldsymbol{R}'}(x) \neq \delta_{\boldsymbol{R}}(x)$.

则称 $\boldsymbol{R}$ 为决策系统的决策值集属性约简.

式中:$\delta_{\boldsymbol{R}}(x)$ 为对象 $x \in U$ 在条件属性 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{R} \subseteq \boldsymbol{C})$ 下关于决策属性 $\boldsymbol{D}$ 的决策值集, $\delta_{\boldsymbol{R}}(x) = \{\rho(y, \boldsymbol{D}) : y \in \boldsymbol{U} \wedge [x]_{\boldsymbol{R}} \cap [y]_{\boldsymbol{R}} \neq \varnothing\}$. 分配约简的约简准则本质在于保持决策系统中任意对象所属条件等价类的决策值种类不发生变化.

2　基于决策向量的分辨矩阵构造

Skowron 首次提出分辨矩阵概念[11],并证明决策系统属性约简集与分辨函数质蕴涵项一一对应,将求解系统属性约简转换为求解分辨函数质蕴涵项问题.但 Skowron 分辨矩阵仅是代数观点属性约简模型的一种演化,不能描述常见的多种属性约简准则,为使分辨矩阵能够描述不同属性约简准则体现的可分辨特性,必须对分辨矩阵元素重新进行合理构造.

本节在定义条件等价类决策向量基础上,定义了简化决策系统,进而基于决策向量设计满足不同属性约简准则的分辨矩阵,并给出其与对应准则属性约简模型的等价性证明,以保证利用所设计分辨矩阵求取对应准则属性约简的正确高效.

定义7　给定决策系统 $\mathrm{DS} = (\boldsymbol{U}, \boldsymbol{C} \cup \boldsymbol{D}, V, \rho)$, 论域 $\boldsymbol{U}$ 关于 $\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 的划分分别记为 $\boldsymbol{U}/\mathrm{IND}(\boldsymbol{C}) = \{X_1, \cdots, X_{|\boldsymbol{U}/\mathrm{IND}(\boldsymbol{C})|}\}$ 与 $U/\mathrm{IND}(\boldsymbol{D}) = \{Y_1, Y_2, \cdots, Y_{|\boldsymbol{U}/\mathrm{IND}(\boldsymbol{D})|}\}$, 则对于任意条件等价类 $X_i \in \boldsymbol{U}/\mathrm{IND}(\boldsymbol{C})$ $(1 \leqslant i \leqslant |\boldsymbol{U}/\mathrm{IND}(\boldsymbol{C})|)$,其决策向量 $\mathrm{DV}(X_i)$ 定义为

$$\mathrm{DV}(X_i) = < \frac{|X_i \cap Y_1|}{|X_i|}, \frac{|X_i \cap Y_2|}{|X_i|}, \cdots, \frac{|X_i \cap Y_{|\boldsymbol{U}/\mathrm{IND}(\boldsymbol{D})|}|}{|X_i|} > .$$

条件等价类的决策向量反映了该条件等价类相对各决策的隶属度分配.对于一致条件等价类 X_i,由于 $\exists Y_j \in \boldsymbol{U}/\mathrm{IND}(\boldsymbol{D})$ 使得 $\frac{|Y_j \cap X_i|}{|X_i|} = 1$, 故 $\mathrm{DV}(X_i)$ 第 j 维值为1其他维值均为0.

定义8　给定决策系统 $\mathrm{DS} = < \boldsymbol{U}, \boldsymbol{C} \cup \boldsymbol{D}, V, \rho >$,其简化决策系统定义为:$\mathrm{sim}(\mathrm{DS}) = < \boldsymbol{U}/\mathrm{IND}(\boldsymbol{C}), \boldsymbol{C} \cup \boldsymbol{D}', V', \rho' >$, $V' = \cup_{a \in \boldsymbol{C} \cup \boldsymbol{D}'} \boldsymbol{V}_a$, $\boldsymbol{V}_a$ 为属性 a 的值域; $\rho' : \boldsymbol{U} \times (\boldsymbol{C} \cup \boldsymbol{D}') \to V'$ 为信息函数,使得 $\rho'(X_i, a) \in V_a(X_i \in \boldsymbol{U}/\mathrm{IND}(\boldsymbol{C}), a \in \boldsymbol{C} \cup \boldsymbol{D}')$, 其中 $\rho'(X_i, D') = DV(X_i)$.

定义 9　给定 $DS=<\boldsymbol{U},\boldsymbol{C}\cup\boldsymbol{D},V,\rho>$ 及 $\mathrm{sim}(DS)=<U/\mathrm{IND}(\boldsymbol{C}),\boldsymbol{C}\cup\boldsymbol{D}',V',\rho'>$，其绝对属性约简分辨矩阵 $\boldsymbol{M}_{DS}=\{m_{ij}\}$ 为 $|\boldsymbol{U}/\mathrm{IND}(\boldsymbol{C})|\times|\boldsymbol{U}/\mathrm{IND}(\boldsymbol{C})|$ 矩阵，其元素 $m_{ij}(1<i\leqslant|\boldsymbol{U}/\mathrm{IND}(\boldsymbol{C})|,1\leqslant j<i)$ 定义为

$$m_{ij}=\{a\mid a\in\boldsymbol{C}\wedge\rho'(X_i,a)\neq\rho'(X_j,a)\}.$$

定理 1　给定 $DS=<\boldsymbol{U},\boldsymbol{C}\cup\boldsymbol{D},V,\rho>$，$\mathrm{sim}(DS)=<\boldsymbol{U}/\mathrm{IND}(\boldsymbol{C}),\boldsymbol{C}\cup\boldsymbol{D}',V',\rho'>$，及其绝对属性约简分辨矩阵 $\boldsymbol{M}_{DS}=\{m_{ij}\}$，$\mathrm{IND}(R)=\mathrm{IND}(\boldsymbol{C})$ 的充要条件为 $\forall m_{ij}\neq\varnothing\rightarrow\boldsymbol{R}\cap m_{ij}\neq\varnothing$.

证明：若 $\forall m_{ij}\neq\varnothing\rightarrow\boldsymbol{R}\cap m_{ij}\neq\varnothing$，运用反证法假设 $\mathrm{IND}(\boldsymbol{R})=\mathrm{IND}(\boldsymbol{C})$ 不成立，那么一定有 $\exists X_i$，$X_j\in\boldsymbol{U}/\mathrm{IND}(\boldsymbol{C})(m_{ij}\neq\varnothing)$ 使得 X_i 与 X_j 在条件属性 $\boldsymbol{R}$ 上取相同值，在条件属性 $\boldsymbol{C}$ 上取不同值，而 $m_{ij}=\{a\mid a\in\boldsymbol{C}\wedge\rho'(X_i,a)\neq\rho'(X_j,a)\}$，因此 $\boldsymbol{R}\cap m_{ij}=\varnothing$，这与前提 $\boldsymbol{R}\cap m_{ij}\neq\varnothing$ 矛盾，故假设不成立，因此“$\mathrm{IND}(\boldsymbol{R})=\mathrm{IND}(\boldsymbol{C})$”成立.

若 $\mathrm{IND}(\boldsymbol{R})=\mathrm{IND}(\boldsymbol{C})$，运用反证法假设“$\forall m_{ij}\neq\varnothing\rightarrow\boldsymbol{R}\cap m_{ij}\neq\varnothing$”不成立则 $\exists m_{ij}\neq\varnothing\rightarrow\boldsymbol{R}\cap m_{ij}=\varnothing$，那么必有 $\exists X_i,X_j\in\boldsymbol{U}/\mathrm{IND}(\boldsymbol{C})$ 使得 X_i 与 X_j 在 $\boldsymbol{R}$ 上取相同值但在 $\boldsymbol{C}$ 上取不同值，则必有 $\mathrm{IND}(\boldsymbol{R})\neq\mathrm{IND}(\boldsymbol{C})$，这与前提相矛盾.因此假设不成立，故有“$\forall m_{ij}\neq\varnothing\rightarrow\boldsymbol{R}\cap m_{ij}\neq\varnothing$”.

定义 10　给定 $DS=<\boldsymbol{U},\boldsymbol{C}\cup\boldsymbol{D},V,\rho>$ 及 $\mathrm{sim}(DS)=<U/\mathrm{IND}(\boldsymbol{C}),\boldsymbol{C}\cup\boldsymbol{D}',V',\rho'>$，其相对关系属性约简分辨矩阵 $\boldsymbol{M}_{DS}=\{m_{ij}\}$ 为 $|\boldsymbol{U}/\mathrm{IND}(\boldsymbol{C})|\times|\boldsymbol{U}/\mathrm{IND}(\boldsymbol{C})|$ 矩阵，其元素 $m_{ij}(1<i\leqslant|\boldsymbol{U}/\mathrm{IND}(\boldsymbol{C})|$，$1\leqslant j<i)$ 定义为

$$m_{ij}=\begin{cases}\{a\mid a\in\boldsymbol{C}\wedge\rho'(X_i,a)\neq\rho'(X_j,a)\},(|\lambda_1\rho'(X_i,D')|=1\wedge|\lambda_1\rho'(X_j,D')|=1\wedge\\ \qquad\rho'(X_i,D')\neq\rho'(X_j,D'))\vee(|\lambda_0\rho'(X_i,D')|>1\vee|\lambda_0\rho'(X_j,D')|>1);\\ \varnothing\qquad\text{otherwise}.\end{cases}$$

定理 2　给定 $DS=<\boldsymbol{U},\boldsymbol{C}\cup\boldsymbol{D},V,\rho>$，$\mathrm{sim}(DS)=<\boldsymbol{U}/\mathrm{IND}(\boldsymbol{C}),\boldsymbol{C}\cup\boldsymbol{D}',V',\rho'>$，及其相对关系属性约简分辨矩阵 $\boldsymbol{M}_{DS}=\{m_{ij}\}$，$\mathrm{IND}(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{D})=\mathrm{IND}(\boldsymbol{C}/\boldsymbol{D})$ 的充要条件为 $\forall m_{ij}\neq\varnothing\rightarrow\boldsymbol{R}\cap m_{ij}\neq\varnothing$.

证明：若 $\forall m_{ij}\neq\varnothing\rightarrow\boldsymbol{R}\cap m_{ij}\neq\varnothing$，运用反证法假设 $\mathrm{IND}(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{D})=\mathrm{IND}(\boldsymbol{C}/\boldsymbol{D})$ 不成立，那么一定有 $\exists X_i,X_j\in\boldsymbol{U}/\mathrm{IND}(\boldsymbol{C})(m_{ij}\neq\varnothing)$ 使得 X_i 与 X_j 在条件属性 $\boldsymbol{R}$ 上取相同值，即 $\forall a\in\boldsymbol{R}\rightarrow\rho'(X_i,a)=\rho'(X_j,a)$，而 $m_{ij}=\{a\mid a\in\boldsymbol{C}\wedge\rho'(X_i,a)\neq\rho'(X_j,a)\}$，因此 $\boldsymbol{R}\cap m_{ij}=\varnothing$，这与前提 $\boldsymbol{R}\cap m_{ij}\neq\varnothing$ 矛盾，故假设不成立，因此 $\mathrm{IND}(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{D})=\mathrm{IND}(\boldsymbol{C}/\boldsymbol{D})$.

若 $\mathrm{IND}(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{D})=\mathrm{IND}(\boldsymbol{C}/\boldsymbol{D})$，运用反证法假设“$\forall m_{ij}\neq\varnothing\rightarrow\boldsymbol{R}\cap m_{ij}\neq\varnothing$”不成立则 $\exists m_{ij}\neq\varnothing\rightarrow\boldsymbol{R}\cap m_{ij}=\varnothing$，那么必有 $\exists X_i,X_j\in\boldsymbol{U}/\mathrm{IND}(\boldsymbol{C})$ 使得 X_i 与 X_j 在 $\boldsymbol{R}$ 上取相同值但在 $\boldsymbol{C}$ 上取不同值，则必有 $\mathrm{IND}(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{D})\neq\mathrm{IND}(\boldsymbol{C}/\boldsymbol{D})$，这与前提相矛盾.因此假设不成立，故有“$\forall m_{ij}\neq\varnothing\rightarrow R\cap m_{ij}\neq\varnothing$”.

定义 11　给定 $DS=<\boldsymbol{U},\boldsymbol{C}\cup\boldsymbol{D},V,\rho>$ 及 $\mathrm{sim}(DS)=<\boldsymbol{U}/\mathrm{IND}(\boldsymbol{C}),\boldsymbol{C}\cup\boldsymbol{D}',V',\rho'>$，其相对正域属性约简分辨矩阵 $\boldsymbol{M}_{DS}=\{m_{ij}\}$ 为 $|\boldsymbol{U}/\mathrm{IND}(\boldsymbol{C})|\times|\boldsymbol{U}/\mathrm{IND}(\boldsymbol{C})|$ 矩阵，其元素 $m_{ij}(1<i\leqslant|\boldsymbol{U}/\mathrm{IND}(\boldsymbol{C})|,1\leqslant j<i)$ 定义为

$$m_{ij}=\begin{cases}\{a\mid a\in\boldsymbol{C}\wedge\rho'(X_i,a)\neq\rho'(X_j,a)\},\quad\rho'(X_i,D)\neq\rho'(X_j,D)\wedge(|\lambda_1\rho'(X_i,D)|=\\ \qquad 1\vee|\lambda_1\rho'(X_j,D)|=1);\\ \varnothing\qquad\text{otherwise}.\end{cases}$$

定理 3　给定 $DS=<\boldsymbol{U},\boldsymbol{C}\cup\boldsymbol{D},V,\rho>$，$\mathrm{sim}(DS)=<\boldsymbol{U}/\mathrm{IND}(\boldsymbol{C}),\boldsymbol{C}\cup\boldsymbol{D}',V',\rho'>$，及相对正域属性约简分辨矩阵 $M_{DS}=\{m_{ij}\}$，$\mathrm{POS}_{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{D})=\mathrm{POS}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{D})$ 的充要条件为 $\forall m_{ij}\neq\varnothing\rightarrow\boldsymbol{R}\cap m_{ij}\neq\varnothing$.

证明：若 $\forall m_{ij}\neq\varnothing\rightarrow R\cap m_{ij}\neq\varnothing$，利用反证法假设 $\mathrm{POS}_{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{D})\neq\mathrm{POS}_{R}(\boldsymbol{D})$ 则存在 $X_i\in\boldsymbol{U}/\mathrm{IND}(\boldsymbol{C})$，$X_j\in\boldsymbol{U}/\mathrm{IND}(\boldsymbol{C})(m_{ij}\neq\varnothing)$ 使得 X_i 与 X_j 在 $\boldsymbol{R}$ 上不可分辨但在 $\boldsymbol{C}$ 上可分辨，具有不同决策且至少其中之一包含于 $\mathrm{POS}_{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{D})$，而 $m_{ij}=\{a\mid a\in\boldsymbol{C}\wedge\rho'(X_i,a)\neq\rho'(X_j,a)\}$，因此 $\boldsymbol{R}\cap m_{ij}=\varnothing$，这与前提 $\boldsymbol{R}\cap m_{ij}\neq\varnothing$ 矛盾，因此假设“$\mathrm{POS}_{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{D})\neq\mathrm{POS}_{R}(\boldsymbol{D})$”不成立，从而有“$\mathrm{POS}_{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{D})=\mathrm{POS}_{R}(\boldsymbol{D})$”成立.

若 $\mathrm{POS}_{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{D})=\mathrm{POS}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{D})$，利用反证法假设 $\exists m_{ij}\neq\varnothing$ 使得 $\boldsymbol{R}\cap m_{ij}=\varnothing$，则存在 $X_i\in\boldsymbol{U}/\mathrm{IND}(\boldsymbol{C})$，$X_j\in\boldsymbol{U}/\mathrm{IND}(\boldsymbol{C})$ 使得 X_i 与 X_j 在 $\boldsymbol{R}$ 上不可分辨但在 $\boldsymbol{C}$ 上可分辨，具有不同决策且至少其中之一包含于 $\mathrm{POS}_{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{D})$，即两个具有不同决策的条件等价类 X_i 与 X_j 在 $\boldsymbol{R}$ 上发生合并，必会导致相对正域的变化即 $\mathrm{POS}_{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{D})\neq$

$POS_R(\boldsymbol{D})$,这与前提相矛盾.故假设“$\exists m_{ij} \neq \varnothing$ 使得 $\boldsymbol{R} \cap m_{ij} = \varnothing$”不成立,从而有其逆命题“$\forall m_{ij} \neq \varnothing \to \boldsymbol{R} \cap m_{ij} \neq \varnothing$”成立.

定义 12 给定 $DS = < \boldsymbol{U},\boldsymbol{C} \cup \boldsymbol{D},V,\rho >$ 及 $\mathrm{sim}(DS) = < \boldsymbol{U}/\mathrm{IND}(\boldsymbol{C}),\boldsymbol{C} \cup \boldsymbol{D}',V',\rho' >$,其条件分布属性约简分辨矩阵 $\boldsymbol{M}_{DS} = \{m_{ij}\}$ 为 $|\boldsymbol{U}/\mathrm{IND}(\boldsymbol{C})| \times |\boldsymbol{U}/\mathrm{IND}(\boldsymbol{C})|$ 矩阵,其元素 $m_{ij}(1 < i \leqslant |\boldsymbol{U}/\mathrm{IND}(\boldsymbol{C})|, 1 \leqslant j < i)$ 定义为

$$m_{ij} = \begin{cases} \{a \mid a \in \boldsymbol{C} \wedge \rho'(X_i,a) \neq \rho'(X_j,a)\}, & \rho'(X_i,\boldsymbol{D}') \neq \rho'(X_j,\boldsymbol{D}'); \\ \varnothing & \text{otherwise.} \end{cases}$$

定理 4 给定 $DS = < \boldsymbol{U},\boldsymbol{C} \cup \boldsymbol{D},V,\rho >$, $\mathrm{sim}(DS) = < \boldsymbol{U}/\mathrm{IND}(\boldsymbol{C}),\boldsymbol{C} \cup \boldsymbol{D}',V',\rho' >$,及其条件分布属性约简分辨矩阵 $M_{DS} = \{m_{ij}\}$, $\forall x \in U \to \mu_{\boldsymbol{R}}(x) = \mu_{\boldsymbol{C}}(x)$ 的充要条件为 $\forall m_{ij} \neq \varnothing \to \boldsymbol{R} \cap m_{ij} \neq \varnothing$.

证明:若 $\forall m_{ij} \neq \varnothing \to \boldsymbol{R} \cap m_{ij} \neq \varnothing$, 利用反证法假设 $\forall x \in \boldsymbol{U} \to \mu_{\boldsymbol{R}}(x) = \mu_{\boldsymbol{C}}(x)$ 不成立,则存在 $X_i \in \boldsymbol{U}/\mathrm{IND}(\boldsymbol{C}), X_j \in \boldsymbol{U}/\mathrm{IND}(\boldsymbol{C})(m_{ij} \neq \varnothing)$ 使得 X_i 与 X_j 在 $\boldsymbol{R}$ 上不可分辨且其分布函数不相等即 $\rho'(X_i,\boldsymbol{D}') \neq \rho'(X_j,\boldsymbol{D}')$, 而 $m_{ij} = \{a \mid a \in \boldsymbol{C} \wedge \rho'(X_i,a) \neq \rho'(X_j,a)\}$, 因此 $\boldsymbol{R} \cap m_{ij} = \varnothing$, 这与前提 $\boldsymbol{R} \cap m_{ij} \neq \varnothing$ 矛盾,因此假设不成立,从而 $\forall x \in \boldsymbol{U} \to \mu_{\boldsymbol{R}}(x) = \mu_{\boldsymbol{C}}(x)$ 成立.

若 $\forall x \in \boldsymbol{U} \to \mu_{\boldsymbol{R}}(x) = \mu_{\boldsymbol{C}}(x)$, 利用反证法假设“$\forall m_{ij} \neq \varnothing \to \boldsymbol{R} \cap m_{ij} \neq \varnothing$”不成立,则 $\exists m_{ij} \neq \varnothing$ 使得 $R \cap m_{ij} = \varnothing$,即 $\exists X_i, X_j \in \boldsymbol{U}/\mathrm{IND}(\boldsymbol{C})$ 使得 X_i 与 X_j 在 $\boldsymbol{R}$ 上不可分辨但在 $\boldsymbol{C}$ 上可分辨且 $\rho'(X_i,\boldsymbol{D}') \neq \rho'(X_j,\boldsymbol{D}')$,即 2 个具有不同分布函数的条件等价类 X_i 与 X_j 在 $\boldsymbol{R}$ 上发生合并,这与前提“$\forall x \in \boldsymbol{U} \to \mu_{\boldsymbol{R}}(x) = \mu_{\boldsymbol{C}}(x)$”相矛盾.故假设不成立,从而有“$\forall m_{ij} \neq \varnothing \to \boldsymbol{R} \cap m_{ij} \neq \varnothing$”成立.

定义 13 给定 $DS = < \boldsymbol{U},\boldsymbol{C} \cup \boldsymbol{D},V,\rho >$ 及 $\mathrm{sim}(DS) = < \boldsymbol{U}/\mathrm{IND}(\boldsymbol{C}),\boldsymbol{C} \cup \boldsymbol{D}',V',\rho' >$,其最大条件分布属性约简分辨矩阵 $\boldsymbol{M}_{DS} = \{m_{ij}\}$ 为 $|\boldsymbol{U}/\mathrm{IND}(\boldsymbol{C})| \times |\boldsymbol{U}/\mathrm{IND}(\boldsymbol{C})|$ 矩阵,其元素 $m_{ij}(1 < i \leqslant |\boldsymbol{U}/\mathrm{IND}(\boldsymbol{C})|, 1 \leqslant j < i)$ 定义为

$$m_{ij} = \begin{cases} \{a \mid a \in \boldsymbol{C} \wedge \rho'(X_i,a) \neq \rho'(X_j,a)\}, & \gamma_{\boldsymbol{C}}(X_i) \neq \gamma_{\boldsymbol{C}}(X_j); \\ \varnothing & \text{otherwise.} \end{cases}$$

定理 5 给定 $DS = < \boldsymbol{U},\boldsymbol{C} \cup \boldsymbol{D},V,\rho >$, $\mathrm{sim}(DS) = < \boldsymbol{U}/\mathrm{IND}(\boldsymbol{C}),\boldsymbol{C} \cup \boldsymbol{D}',V',\rho' >$,及最大条件分布属性约简分辨矩阵 $M_{DS} = \{m_{ij}\}$, $\forall x \in \boldsymbol{U} \to \gamma_R(x) = \gamma_{\boldsymbol{C}}(x)$ 的充要条件为 $\forall m_{ij} \neq \varnothing \to \boldsymbol{R} \cap m_{ij} \neq \varnothing$.

证明:若 $\forall m_{ij} \neq \varnothing \to \boldsymbol{R} \cap m_{ij} \neq \varnothing$, 利用反证法假设 $\exists x \in \boldsymbol{U}, \gamma_R(x) \neq \gamma_{\boldsymbol{C}}(x)$ 则存在 $X_i \in \boldsymbol{U}/\mathrm{IND}(\boldsymbol{C}), X_j \in \boldsymbol{U}/\mathrm{IND}(\boldsymbol{C})(m_{ij} \neq \varnothing)$ 使得 X_i 与 X_j 在 $\boldsymbol{R}$ 上不可分辨且 $\gamma_{\boldsymbol{C}}(X_i) \neq \gamma_{\boldsymbol{C}}(X_j)$, 而 $m_{ij} = \{a \mid a \in \boldsymbol{C} \wedge \rho'(X_i,a) \neq \rho'(X_j,a)\}$, 因此 $\boldsymbol{R} \cap m_{ij} = \varnothing$, 这与前提 $\boldsymbol{R} \cap m_{ij} \neq \varnothing$ 矛盾,因此假设“$\exists x \in \boldsymbol{U}, \gamma_{\boldsymbol{R}}(x) \neq \gamma_{\boldsymbol{C}}(x)$”不成立,从而其逆命题“$\forall x \in \boldsymbol{U} \to \gamma_{\boldsymbol{R}}(x) = \gamma_{\boldsymbol{C}}(x)$”成立.

若 $\forall x \in \boldsymbol{U} \to \gamma_R(x) = \gamma_{\boldsymbol{C}}(x)$, 利用反证法假设 $\exists m_{ij} \neq \varnothing$ 使得 $\boldsymbol{R} \cap m_{ij} = \varnothing$,则存在 $X_i \in \boldsymbol{U}/\mathrm{IND}(\boldsymbol{C})$, $X_j \in \boldsymbol{U}/\mathrm{IND}(\boldsymbol{C})$ 使得 X_i 与 X_j 在 $\boldsymbol{R}$ 上不可分辨但在 $\boldsymbol{C}$ 上可分辨且 $\gamma_{\boldsymbol{C}}(X_i) \neq \gamma_{\boldsymbol{C}}(X_j)$, 即 2 个条件最大隶属度不同的条件等价类 X_i 与 X_j 在 $\boldsymbol{R}$ 上发生合并,必会导致条件最大隶属度的变化即 $\gamma_{\boldsymbol{C}}(X_i) \neq \gamma_{\boldsymbol{C}}(X_j)$, 这与前提相矛盾.故假设“$\exists m_{ij} \neq \varnothing$ 使得 $\boldsymbol{R} \cap m_{ij} = \varnothing$”不成立,从而有其逆命题“$\forall m_{ij} \neq \varnothing \to \boldsymbol{R} \cap m_{ij} \neq \varnothing$”成立.

定义 14 给定 $DS = < \boldsymbol{U},\boldsymbol{C} \cup \boldsymbol{D},V,\rho >$ 及 $\mathrm{sim}(DS) = < \boldsymbol{U}/\mathrm{IND}(\boldsymbol{C}),\boldsymbol{C} \cup \boldsymbol{D}',V',\rho' >$,其决策值集属性约简分辨矩阵 $\boldsymbol{M}_{DS} = \{m_{ij}\}$ 为 $|\boldsymbol{U}/\mathrm{IND}(\boldsymbol{C})| \times |\boldsymbol{U}/\mathrm{IND}(\boldsymbol{C})|$ 矩阵,其元素 $m_{ij}(1 < i \leqslant |\boldsymbol{U}/\mathrm{IND}(\boldsymbol{C})|, 1 \leqslant j < i)$ 定义为

$$m_{ij} = \begin{cases} \{a \mid a \in \boldsymbol{C} \wedge \rho'(X_i,a) \neq \rho'(X_j,a)\}, & \lambda_0\rho'(X_i,\boldsymbol{D}) \neq \lambda_0\rho'(X_j,\boldsymbol{D}); \\ \varnothing & \text{otherwise.} \end{cases}$$

定理 6 给定 $DS = < \boldsymbol{U},\boldsymbol{C} \cup \boldsymbol{D},V,\rho >$, $\mathrm{sim}(DS) = < \boldsymbol{U}/\mathrm{IND}(\boldsymbol{C}),\boldsymbol{C} \cup \boldsymbol{D}',V',\rho' >$,及其决策值集属性约简分辨矩阵 $\boldsymbol{M}_{DS} = \{m_{ij}\}$, $\forall x \in \boldsymbol{U}, \delta_{\boldsymbol{R}}(x) = \delta_{\boldsymbol{C}}(x)$ 的充要条件为 $\forall m_{ij} \neq \varnothing \to \boldsymbol{R} \cap m_{ij} \neq \varnothing$.

证明:若 $\forall m_{ij} \neq \varnothing \to \boldsymbol{R} \cap m_{ij} \neq \varnothing$, 利用反证法假设 $\exists x \in \boldsymbol{U}, \delta_{\boldsymbol{R}}(x) \neq \delta_{\boldsymbol{C}}(x)$ 则存在 $X_i \in \boldsymbol{U}/\mathrm{IND}(\boldsymbol{C}), X_j \in \boldsymbol{U}/\mathrm{IND}(C)(m_{ij} \neq \varnothing)$ 使得 X_i 与 X_j 在 $\boldsymbol{R}$ 上不可分辨且其决策值集不相等,即 2 个决策值集不同的条件等价类 X_i 与 X_j 在 $\boldsymbol{R}$ 上发生合并,而 $m_{ij} = \{a \mid a \in \boldsymbol{C} \wedge \rho'(X_i,a) \neq \rho'(X_j,a)\}$, 因此 $\boldsymbol{R} \cap m_{ij} =$

$\varnothing$, 这与前提 $\boldsymbol{R} \cap m_{ij} \neq \varnothing$ 矛盾,因此假设“$\exists x \in U, \delta_{\boldsymbol{R}}(x) \neq \delta_{\boldsymbol{C}}(x)$”不成立,从而其逆命题“$\forall x \in \boldsymbol{U}, \delta_{\boldsymbol{R}}(x) = \delta_{\boldsymbol{C}}(x)$”成立.

若 $\forall x \in \boldsymbol{U}, \delta_{\boldsymbol{R}}(x) = \delta_{\boldsymbol{C}}(x)$, 利用反证法假设 $\exists m_{ij} \neq \varnothing$ 使得 $\boldsymbol{R} \cap m_{ij} = \varnothing$, 则存在 $X_i \in \boldsymbol{U}/\mathrm{IND}(\boldsymbol{C})$, $X_j \in \boldsymbol{U}/\mathrm{IND}(\boldsymbol{C})$ 使得 X_i 与 X_j 在 $\boldsymbol{R}$ 上不可分辨但在 $\boldsymbol{C}$ 上可分辨且 $\delta_{\boldsymbol{R}}(x) \neq \delta_{\boldsymbol{C}}(x)(x \in X_i \cup X_j)$, 即 2 个决策值集不同的条件等价类 X_i 与 X_j 在 $\boldsymbol{R}$ 上发生合并,必会导致决策值集的变化即 $\delta_{\boldsymbol{R}}(x) \neq \delta_{\boldsymbol{C}}(x)$, 这与前提相矛盾.故假设“$\exists m_{ij} \neq \varnothing$ 使得 $\boldsymbol{R} \cap m_{ij} = \varnothing$”不成立,从而可得出其逆命题“$\forall m_{ij} \neq \varnothing \rightarrow \boldsymbol{R} \cap m_{ij} \neq \varnothing$”成立.

定义 15　给定 $\mathrm{DS} = \langle \boldsymbol{U}, \boldsymbol{C} \cup \boldsymbol{D}, V, \rho \rangle$, $\mathrm{sim}(\mathrm{DS}) = \langle \boldsymbol{U}/\mathrm{IND}(\boldsymbol{C}), \boldsymbol{C} \cup \boldsymbol{D}', V', \rho' \rangle$, 及其上的属性约简分辨矩阵 $\boldsymbol{M}_{\mathrm{DS}} = \{m_{ij}\}$, 其分辨函数定义为: $\mathrm{DF}(\mathrm{DS}) = \wedge\{\vee m_{ij}: 1 \leqslant j < i \leqslant n, m_{ij} \in M_{\mathrm{DS}} \wedge m_{ij} \neq \varnothing\}$. 其中 $\vee m_{ij} = \vee a(a \in m_{ij})$ 表示矩阵元素 c_{ij} 中所有属性的析取.

定理 7　给定 $\mathrm{DS} = \langle \boldsymbol{U}, \boldsymbol{C} \cup \boldsymbol{D}, V, \rho \rangle$, 其分辨函数为 DF, 则决策系统的属性约简集与 DF 质蕴涵项一一对应.

定理 7 证明过程详见文献[11].由于属性约简只与分辨函数 DF 质蕴涵项有关,可运用吸收律与消解律化简 DF 为一合取范式.这样,可将求解决策系统各准则属性约简问题转化为决策分辨函数合取范式与析取范式的转换问题.

3　实例分析

为更好地说明本文基于决策向量构造不同约简准则分辨矩阵方法的有效性, 以表 1 所示决策系统为例进行分析说明.

表 1　决策系统 DS

$\boldsymbol{U}$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	d
X_1	0	0	0	0	0	0	0
X_2	0	0	0	0	0	0	1
X_3	1	1	1	0	0	0	1
X_4	1	1	0	1	0	0	0
X_5	1	1	0	1	0	0	1
X_6	1	1	0	1	0	0	1
X_7	1	0	0	0	0	1	0
X_8	1	0	0	0	0	1	1
X_9	1	0	1	1	1	0	0

据定义 8 可得简化决策系统见表 2.

表 2　简化决策系统

$\boldsymbol{U}/\mathrm{IND}(\boldsymbol{C})$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	$\boldsymbol{D}'$
X_1	0	0	0	0	0	0	(0.5,0.5)
X_2	1	1	1	0	0	0	(0,1)
X_3	1	1	0	1	0	0	(0.333,0.667)
X_4	1	0	0	0	0	1	(0.5,0.5)
X_5	1	0	1	1	1	0	(1,0)

按定义 9 得到绝对属性约简分辨矩阵见表 3,其分辨函数为 $(a_1 \vee a_2 \vee a_3) \wedge (a_1 \vee a_2 \vee a_4) \wedge (a_3 \vee a_4) \wedge (a_1 \vee a_6) \wedge (a_2 \vee a_3 \vee a_6) \wedge (a_2 \vee a_4 \vee a_6) \wedge (a_2 \vee a_4 \vee a_5) \wedge (a_2 \vee a_3 \vee a_5)$, 将其转化为等价的极小析取范式 $(a_1 \wedge a_2 \wedge a_3) \vee (a_2 \wedge a_3 \wedge a_6) \vee (a_1 \wedge a_2 \wedge a_4) \vee (a_2 \wedge a_4 \wedge a_6) \vee (a_1 \wedge a_3 \wedge a_4) \vee (a_3 \wedge a_4 \wedge a_6) \vee \vee (a_1 \wedge a_3 \wedge a_5 \wedge a_6) \vee (a_1 \wedge a_4 \wedge a_5 \wedge a_6)$. 因此决策系统 DS 的绝对属性约简为 $\{\{a_1a_2a_3\}, \{a_2a_3a_6\}, \{a_1a_2a_4\}, \{a_2a_4a_6\}, \{a_1a_3a_4\}, \{a_3a_4a_6\}, \{a_1a_3a_5a_6\}, \{a_1a_4a_5a_6\}\}$.

按定义 10 得到相对关系属性约简分辨矩阵与表 3 相同,因此决策系统 DS 的相对关系属性约简与绝对属性约简相同,即为 $\{\{a_1a_2a_3\}, \{a_2a_3a_6\}, \{a_1a_2a_4\}, \{a_2a_4a_6\}, \{a_1a_3a_4\}, \{a_3a_4a_6\}, \{a_1a_3a_5a_6\}, \{a_1a_4a_5a_6\}\}$.

表 3 绝对属性约简分辨矩阵

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ
X_2	$\{a_1a_2a_3\}$	Φ	Φ	Φ	Φ
X_3	$\{a_1a_2a_4\}$	$\{a_3a_4\}$	Φ	Φ	Φ
X_4	$\{a_1a_6\}$	$\{a_2a_3a_6\}$	$\{a_2a_4a_6\}$	Φ	Φ
X_5	$\{a_1a_3a_4a_5\}$	$\{a_2a_4a_5\}$	$\{a_2a_3a_5\}$	$\{a_3a_4a_5a_6\}$	Φ

按定义 11 得到相对正域分辨矩阵见表 4,其分辨函数为 $(a_1 \vee a_2 \vee a_3) \wedge (a_3 \vee a_4) \wedge (a_2 \vee a_3 \vee a_6) \wedge (a_2 \vee a_4 \vee a_5) \wedge (a_2 \vee a_3 \vee a_5)$,将其转化为等价的极小析取范式 $(a_2 \wedge a_3) \vee (a_2 \wedge a_4) \vee (a_3 \wedge a_4) \vee (a_3 \wedge a_5) \vee (a_1 \wedge a_4 \wedge a_5 \wedge a_6)$.因此决策系统 DS 的相对正域属性约简为 $\{\{a_2a_3\}, \{a_2a_4\}, \{a_3a_4\}, \{a_3a_5\}, \{a_1a_4a_5a_6\}\}$.

表 4 相对正域属性约简分辨矩阵

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ
X_2	$\{a_1a_2a_3\}$	Φ	Φ	Φ	Φ
X_3	Φ	$\{a_3a_4\}$	Φ	Φ	Φ
X_4	Φ	$\{a_2a_3a_6\}$	Φ	Φ	Φ
X_5	$\{a_1a_3a_4a_5\}$	$\{a_2a_4a_5\}$	$\{a_2a_3a_5\}$	$\{a_3a_4a_5a_6\}$	Φ

按定义 12 得到条件分布属性约简分辨矩阵见表 5,其分辨函数为 $(a_1 \vee a_2 \vee a_3) \wedge (a_1 \vee a_2 \vee a_4) \wedge (a_3 \vee a_4) \wedge (a_2 \vee a_3 \vee a_6) \wedge (a_2 \vee a_4 \vee a_6) \wedge (a_2 \vee a_4 \vee a_5) \wedge (a_2 \vee a_3 \vee a_5)$,将其转化为等价的极小析取范式 $(a_2 \wedge a_3) \vee (a_2 \wedge a_4) \vee (a_3 \wedge a_4) \vee (a_1 \wedge a_3 \wedge a_5 \wedge a_6) \vee (a_1 \wedge a_4 \wedge a_5 \wedge a_6)$. 因此决策系统 *DS* 的条件分布属性约简为 $\{\{a_2a_3\}, \{a_2a_4\}, \{a_3a_4\}, \{a_1a_3a_5a_6\}, \{a_1a_4a_5a_6\}\}$.

按定义 13 得到最大条件分布属性约简分辨矩阵与表 5 相同,因此决策系统 DS 的最大条件分布属性约简与条件分布属性约简相同,即为 $\{\{a_2a_3\}, \{a_2a_4\}, \{a_3a_4\}, \{a_1a_3a_5a_6\}, \{a_1a_4a_5a_6\}\}$.

按定义 14 得到决策值集属性约简分辨矩阵与表 4 相同,因此决策系统 DS 的决策值集属性约简与相对正域属性约简相同,即为 $\{\{a_2a_3\}, \{a_2a_4\}, \{a_3a_4\}, \{a_3a_5\}, \{a_1a_4a_5a_6\}\}$.

表 5 条件分布属性约简分辨矩阵

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ
X_2	$\{a_1a_2a_3\}$	Φ	Φ	Φ	Φ
X_3	$\{a_1a_2a_4\}$	$\{a_3a_4\}$	Φ	Φ	Φ
X_4	Φ	$\{a_2a_3a_6\}$	$\{a_2a_4a_6\}$	Φ	Φ
X_5	$\{a_1a_3a_4a_5\}$	$\{a_2a_4a_5\}$	$\{a_2a_3a_5\}$	$\{a_3a_4a_5a_6\}$	Φ

针对给定决策系统 DS,相对关系属性约简与绝对属性约简集相同,为 $\{\{a_1a_2a_3\}, \{a_2a_3a_6\}, \{a_1a_2a_4\}, \{a_2a_4a_6\}, \{a_1a_3a_4\}, \{a_3a_4a_6\}, \{a_1a_3a_5a_6\}, \{a_1a_4a_5a_6\}\}$;最大条件分布属性约简与条件分布属性约简集相同,为 $\{\{a_2a_3\}, \{a_2a_4\}, \{a_3a_4\}, \{a_1a_3a_5a_6\}, \{a_1a_4a_5a_6\}\}$;相对正域属性约简与决策值属性约简集相同,为 $\{\{a_2a_3\}, \{a_2a_4\}, \{a_3a_4\}, \{a_3a_5\}, \{a_1a_4a_5a_6\}\}$. 条件分布属性约简集中存在约简为相对关系属性约简集中约简的真子集;相对正域属性约简集中存在约简 $\{a_3a_5\}$ 为条件分布属性约简集中约简 $\{a_1a_3a_5a_6\}$ 的真子集.文献[8]研究表明,相对关系属性约简与绝对属性约简准则严格于条件分布属性约简与最大条件分布属性约简、条件分布属性约简准则严格于相对正域属性约简与决策值属性约简,以上分

析结果与此结论吻合,进一步验证了本文不同约简准则分辨矩阵构造方法的正确有效.

4 结论

基于 Skowron 分辨矩阵的属性约简模型与基于正域的属性约简模型等价,不能刻画保持其他信息特性侧面下的属性约简.本文在提出条件等价类的决策向量基础上,构建了决策向量简化决策系统,进而设计满足不同约简准则的分辨矩阵及其分辨函数,证明其与对应准则的属性约简模型等价.已有的基于 Skowron 分辨矩阵的成熟约简算法均可平移到本文基于决策向量构造的分辨矩阵之上,为研究不同准则属性约简模型提供了一条新的思路.

参考文献:

[1] Pawlak Z. Rough sets[J]. International Journal of Information and Computer Science, 1982, 11(5):314-356.

[2] Pawlak Z. Rudiments of rough sets[J]. Information Sciences, 2007, 177(1):3-27.

[3] Kryszkiewicz M. Comparative study of alternative types of knowledge reduction in inconsistent systems[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2001,16(1):105-120.

[4] 米据生,吴伟志,张文修.不协调目标信息系统知识约简的比较研究[J].模糊系统与数学,2003,17(3):54-60.

[5] 张文修,米据生,吴伟志.不协调目标信息系统的知识约简[J].计算机学报,2003,26(1):12-18.

[6] 邓大勇.基于粗糙集的数据约简及粗糙集扩展模型的研究[D].北京:北京交通大学,2007.

[7] 邓大勇,黄厚宽,李向军.不一致决策系统中约简之间的比较[J].电子学报,2007,35(2):252-255.

[8] Zhou J, Miao D Q, Pedrycz W, et al. Analysis of alternative objective functions for attribute reduction in complete decision tables[J]. Soft Computing, 2011, 15(8): 1601-1616.

[9] Miao D Q, Zhao Y, Yao Y Y, et al. Relative reducts in consistent and inconsistent decision tables of the Pawlak rough set model[J]. Information Sciences, 2009, 179(24):4140-4150.

[10] 黄治国,刘罡.代数与信息论观点的分辨矩阵属性约简研究[J].微电子学与计算机,2014,31(7):88-92.

[11] Skowron A, Rauszzer C. The discernbility matrices and functions in information systems[M]. Netherlands:Springer, 1992:331-362.