

桥塔纵向作用下悬索桥主缆的非线性参数振动

吕建根¹, 康厚军², 王荣辉³

(1.仲恺农业工程学院 城乡建设学院, 广东 广州 510225; 2.湖南大学 土木工程学院, 湖南 长沙 410082;
3.华南理工大学 土木与交通学院, 广东 广州 510641)

摘 要:研究特大悬索桥施工过程中主缆非线性参数振动问题.综合考虑主缆垂度、大变形引起的几何非线性等因素,将桥塔塔顶振动考虑为主缆的参数激励项,利用 Newton 定律建立的主缆参数振动控制方程,运用 Galerkin 和多尺度方法对主缆参数振动进行了理论分析,以某悬索桥中的主缆为例,运用有限元程序计算了桥塔的前 20 阶频率,通过桥塔与主缆的第一阶面内频率匹配,0 号桥塔的第 11、13 阶振动及 3 号桥塔的第 4 阶振动激发主缆参数振动的可能性最大,数值分析了主缆发生参数振动时的位移时间历程和索力变化规律.研究表明,当桥塔的局部振动频率约为主缆振动频率的 2 倍左右时,主缆容易发生参数振动,发生参数振动时,位移响应显著,缆索张力增量很小.

关键词:悬索桥;主缆;非线性参数振动;多尺度法

中图分类号:U441+.3 O322

文献标志码:A

文章编号:1672-9102(2017)03-0041-06

Nonlinear parametric vibration of cables in suspension bridge under longitudinal vibration of tower

Lyu Jiagen¹, Kang Houjun², Wang Ronghui³

(1.School of Urban and Rural Construction, Zhongkai University of Agriculture and Engineering, Guangzhou 510225, China;
2.College of Civil Engineering, Hunan University, Changsha 410082, China;
3.School of Civil Engineering and Transportation, South China University of Technology, Guangzhou 510641, China)

Abstract: The nonlinear parametric vibration of main cable in suspension bridge was investigated. The local vibration of tower was considered the parametric excitation of main cable, the equation governing the parametric vibration of main cable was derived using Newton Law considering sag and geometric nonlinearity. Then the Galerkin and the multiple scales method were used to analyze the parametric vibration of main cable. A case study of main cable of a suspension bridge, the first 20 frequencies of the tower was calculated by means of the finite element program, through the frequency of tower and the first in-plane frequency of main cable matching, it was very possible that the 11th, 13th order vibration of No.0 tower and the 4th order vibration of No.3 tower excited the parameter vibration of main cable, the time history and the variation law of cable tension were examined. As a result, the main cable is prone to vibration parametric vibration when the local frequency of tower is about 2 times the frequency of main cable. The parametric vibration has a considerable effect on the displacement of main cable, and the increment of cable tension is small.

Keywords: suspension bridge ;cable; nonlinear parametric vibration; the multiple scales method

悬索桥是特大跨径桥梁的主要形式之一,主要由悬索、索塔、锚碇、吊杆、桥面系等部分组成,以承受拉力为主的悬索是悬索桥的主要承重构件,由于悬索具有轻质量、大柔度和低阻尼的特点,极易在边界条件

发生改变的情况下产生大幅度参数振动,因此,为保证悬索桥施工过程中及运营过程中的结构安全,索参数共振问题受到国内外学者的高度重视^[1].

1982年 Kovacs^[2]首次用参数激励来说明斜拉桥中斜拉索大幅度参数振动的机理,这种振动的特点为斜拉桥在外荷载激励下,桥面和桥塔首先产生振动,而后又激发斜拉索振动.在索的力学模型中,参数作为激励且依赖时间变化出现在悬索的控制方程中,而当激励的频率与索的某阶频率成某种倍数关系,小幅激励可能引起悬索的大幅度振动.对于索的振动问题,国内外学者进行了广泛而深入的研究^[3-10],限于篇幅,这里不再赘述.

本文针对国内某特大悬索桥施工过程中的主缆进行参数振动分析,综合考虑主缆垂度、大位移而引起的几何非线性等因素,将桥塔塔顶振动考虑为主缆的参数激励项,推导了主缆的参数振动控制方程,并运用了多尺度方法求解该方程,利用施工过程中观测的塔顶最大位移,数值分析了主缆发生参数振动的力学行为,得到了主缆幅频响应曲线及激频曲线,并给出了主缆在桥塔激励下发生参数振动时的位移时程曲线和索力变化规律.

1 运动方程的建立

主缆参数振动的力学模型见图1所示.假设主缆单位长度的质量为 m ,弦长为 L ,截面面积为 A ,主缆的垂度 d ,弹性模量为 E ,张力为 T ,初张力为 T_0 ,动张力为 ΔT ,对应的水平分力分别为 H, H_0 及 ΔH ,沿水平向建立直角坐标系, $v(x, t)$ 为主缆的面内振动位移,假设塔顶处的水平位移为 $X(t)$.

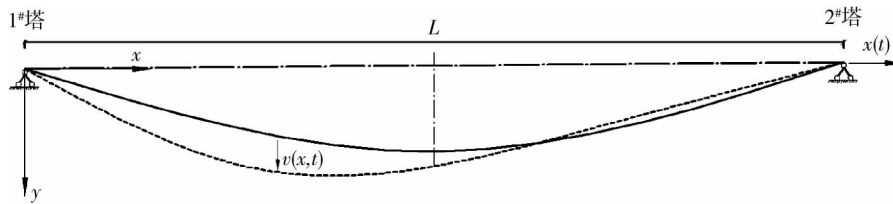


图1 主缆的振动模型

假设缆索的重力垂度曲线为抛物线,考虑缆索的几何非线性和垂度影响,忽略缆索的扭转刚度和弯曲刚度,由于缆索的轴向振动在实际中不起主要作用,因此忽略其轴向振动,利用牛顿定律建立了缆索的非线性参数振动微分方程

$$m \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} - mg = \frac{\partial}{\partial s} \left\{ (T_0 + \Delta T) \frac{\partial [v(x, t) + y(x)]}{\partial s} \right\}. \quad (1)$$

式中: $y(x)$ 为缆索静平衡方程,从主缆的静平衡位置计算.将上述方程展开,代入缆索张力与水平分力的关系式,并利用索静力平衡方程消除重力项后得到

$$m \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} \frac{ds}{dx} = \Delta H \frac{\partial^2 [v(x, t) + y(x)]}{\partial x^2} + H_0 \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2}. \quad (2)$$

利用分离变量法来表示 $v(x, t)$,并考虑缆索的第一阶模态进行分析

$$v(x, t) = y_1(t) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right). \quad (3)$$

根据式(3)及缆索的应力应变关系,可以得到缆索动张力的水平增量

$$\Delta H = \frac{EA}{L} \left\{ X(t) + \frac{\pi^2}{4L} y_1^2(t) + \frac{2mgL}{\pi H_0} y_1(t) \right\}. \quad (4)$$

通过与未考虑垂度影响的索动张力水平增量方程的对比,可知式中这一项 $\frac{EA}{L} \frac{2mgL}{\pi H_0} y_1(t)$ 是由缆索的

重力垂度所引起的.将式(4)代入式(2),考虑阻尼 ξ ,并假设 $X(t) = X \cos(\omega_i t)$,再进行 Galerkin 离散整理得到考虑缆索垂度后的运动微分方程

$$\ddot{y}_1 + 2\xi\omega_1\dot{y}_1 + [\omega_1^2 + \gamma_1 X \cos(\omega_1 t)]y_1 + 3\alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_1^3 + \alpha_3 X \cos(\omega_1 t) = 0. \quad (5)$$

上式中,各系数均由缆索的几何及材料系数确定.

从式(5)中可以看出,对于缆索的一阶振动,桥塔的运动不仅给缆索增加了参数振动 $\gamma_1 X y_1 \cos(\omega_1 t)$, 而且给缆索增加了外激励项 $\alpha_3 \cos(\omega_1 t)$, 方程中不仅含参数振动,同时也是含平方非线性、立方非线性项的系统, α_1 为平方非线性系数; α_2 为立方非线性系数.

2 摄动分析

将式(5)按时间进行无量纲化,同时引入摄动参数 ε , 可以得以下方程:

$$\ddot{y}_1 + 2\varepsilon^2 \xi \dot{y}_1 + [1 + \varepsilon^2 a_1 \cos(kt)]y_1 + a_2 y_1^2 + a_3 y_1^3 + \varepsilon^2 a_4 \cos(kt) = 0. \quad (6)$$

式中: $k = \frac{\omega_t}{\omega_1}$, 并设 $a_1 = \frac{\gamma_1 X}{\omega_1^2}$; $a_2 = \frac{3\alpha_1}{\omega_1^2}$; $a_3 = \frac{\alpha_2}{\omega_1^2}$; $a_4 = \frac{\alpha_3 X}{\omega_1^2}$. 运用多尺度法^[11]对方程进行摄动分析,设解的形式为

$$y(\varepsilon, T_0, T_2) = \varepsilon y_1(T_0, T_2) + \varepsilon^2 y_2(T_0, T_2) + \varepsilon^3 y_3(T_0, T_2). \quad (7)$$

将式(7)代入式(6)中,按 ε 的同次幂进行整理,进行各阶微分方程求解,考虑面内主共振 2 : 1 的内共振关系,引入调谐参数 σ , 令 $\frac{\omega_t}{\omega_1} = 2 + \varepsilon\sigma$, 消除久期项后,可得到缆索关于振幅和相位极坐标形式的平均方程

$$\begin{cases} \dot{A} = -\xi A - \left(\frac{Aa_1}{4} - Aa_2\Lambda\right)\sin\theta; \\ A\dot{\theta} = A\sigma - A^3\left(\frac{3a_3}{4} - \frac{5a_2^2}{6}\right) - \left(\frac{Aa_1}{2} - 2Aa_2\Lambda\right)\cos\theta. \end{cases} \quad (8)$$

式中: $\Lambda = a_4/2(k^2 - 1)$; $A = q(t) \exp[i\theta(t)]/2$; $\gamma = \sigma T_2 - 2\theta$. 当 $\dot{A} = \dot{\theta} = 0$ 时存在稳态运动,对应式(8)的奇点,即对应着方程组:

$$\begin{cases} \xi A_s = \left(a_2\Lambda - \frac{a_1}{4}\right)A_s \sin\theta_s; \\ \frac{1}{2}A_s\sigma - A_s^3\left(\frac{3a_3}{8} - \frac{5a_2^2}{12}\right) = \left(\frac{a_1}{4} - a_2\Lambda\right)A_s \cos\theta_s. \end{cases} \quad (9)$$

的解.从式(9)消去 θ_s , 得到幅频响应曲线方程:

$$\left\{ \xi^2 + \left[0.5\sigma - \left(\frac{3a_3}{8} - \frac{5a_2^2}{12} \right) A_s^2 \right]^2 \right\} A_s^2 = \left(a_2\Lambda - \frac{a_1}{4} \right)^2 A_s^2. \quad (10)$$

从式(10)解得 $A_s = 0$ 或

$$A_s^2 = \left[0.5\sigma \pm \sqrt{\left(a_2\Lambda - \frac{a_1}{4} \right)^2 - \xi^2} \right] / \left(\frac{3a_3}{8} - \frac{5a_2^2}{12} \right). \quad (11)$$

式(11)给出了稳态响应非平凡解的幅值,由式(11)可以推断,考虑 $\xi > 0$, 非平凡解当

$$\begin{cases} \xi \leq \left| a_2\Lambda - \frac{a_1}{4} \right|; \\ \sigma > -2\sqrt{\left(a_2\Lambda - \frac{a_1}{4} \right)^2 - \xi_c^2}. \end{cases} \quad (12)$$

时才存在,也就是主缆发生参数共振和亚谐波共振的必要条件.

从式(11)和式(12)可以得出,仅存在第一(幅值较大)非平凡解的条件为

$$\sigma < 2\sqrt{\left(a_2\Lambda - \frac{a_1}{4} \right)^2 - \xi_c^2}. \quad (13)$$

第一(幅值较大)和第二(幅值较小)非平凡解都存在的条件为

$$\sigma > 2\sqrt{\left(a_2\Lambda - \frac{a_1}{4}\right)^2 - \xi_c^2}. \quad (14)$$

稳态解的稳定性可以通过对式(9)摄动来确定,可以得到特征方程:

$$\lambda^2 + 2\xi\lambda - \left[\sigma - A_s^2\left(\frac{3a_3}{4} - \frac{5a_2^2}{6}\right)\right] \times \left(\frac{3a_3}{4} - \frac{5a_2^2}{6}\right) A_s^2 = 0. \quad (15)$$

根据李雅普诺夫的一次近似稳定判据,由于 $\xi > 0$,则稳态非平凡解稳定的充分条件为

$$\left[\sigma - A_s^2\left(\frac{3a_3}{4} - \frac{5a_2^2}{6}\right)\right] \left(\frac{3a_3}{4} - \frac{5a_2^2}{6}\right) < 0. \quad (16)$$

满足此条件稳态解是稳定的,否则为不稳定.

3 主缆非线性参数振动实例

3.1 基本参数

取某特大桥(见图2)施工过程中缆索作为研究对象,将桥塔塔顶作为主缆的激励项,施工过程中观测到0号桥塔纵桥向最大位移为0.027 m,3号桥塔纵桥向最大位移为0.023 m,主缆的几何参数和材料特性如下:主缆垂跨比为1:9.6,主缆计算跨径 L 为1 176 m,横截面面积 A 为0.464 6 m²,初张力 H_0 为57 438 kN,弹性模量 E 为 2.0×10^5 MPa,每米重量 mg 为36.66 kN/m,缆索的面内第1阶频率为2.898 rad/s,振型为一阶对称模态.

运用有限元程序建立该桥施工中的桥塔-缆索模型,运用子空间法进行模态分析,将桥塔前20阶频率与缆索的频率进行匹配,假设发生参数振动时桥塔频率分布在两倍缆索频率的 $\pm 10\%$ 以内,表1列出了缆索可能发生参数振动的桥塔振型.

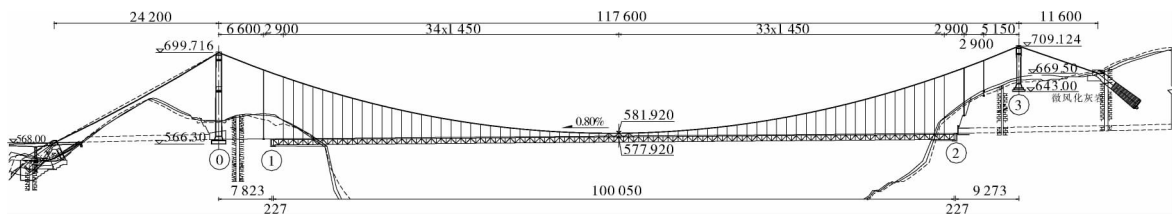


图2 某特大悬索桥总体布置图/cm

表1 桥塔与缆索2:1参数振动频率匹配表

桥塔	振型阶次	频率/(rad/s)	振幅/m	频率比 k
0号塔	11	5.192	0.015	1.792
	13	5.811	0.027	2.005
3号塔	4	5.591	0.023	1.929

3.2 0号桥塔激励下主缆非线性参数振动

首先研究在0号桥塔的激励下主缆的幅频特性和激频关系,将主缆的几何及材料特性参数代入幅频响应曲线方程中,可以得到主缆的幅频曲线和激频响应曲线见图3和图4.从图3可以看出,主缆存在2个共振点,除主共振外,还可能出现2:1的参数共振,参数振动呈现明显的硬弹簧特性,共振点频域内的振幅明显增大;图4显示主缆振幅随塔顶位移激励增大而增大.

假设0号桥塔发生第13阶振型的纵向振动,塔索频率比为2.005,采用四阶Runge-kutta方法^[12]对主缆参数振动方程进行数值求解,缆索的初始扰动为0.001 m,主缆中点处的位移响应曲线见图5所示,从图中可以得到,由于参数振动的发生,位移响应远大于初始位移,最大位移响应达到0.9 m,由于阻尼的影响,位移响应随时间增长而呈衰减趋势,最后趋于稳态振动,振动过程中缆索张力水平分量最大增加46.18 kN,约为缆索水平初张力的1/1 000,基本可以忽略其影响.

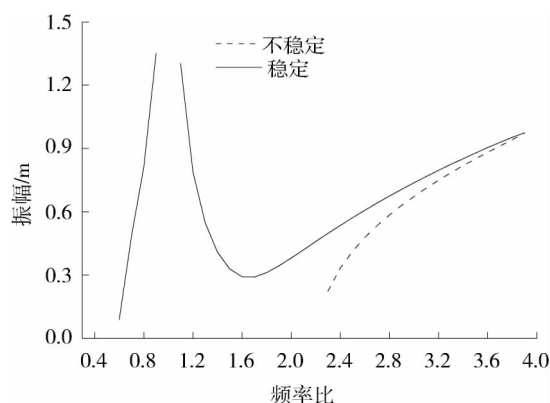


图3 主缆幅频响应曲线

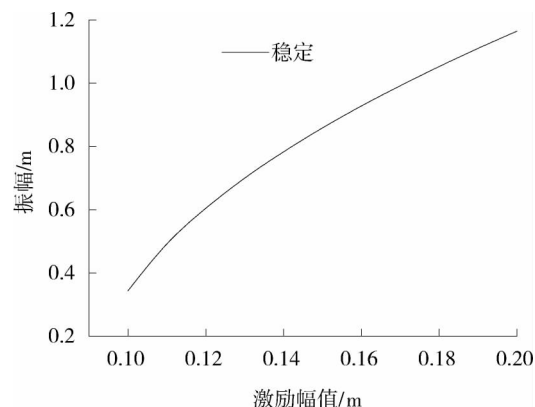


图4 0号桥塔顶位移与主缆振幅的关系曲线

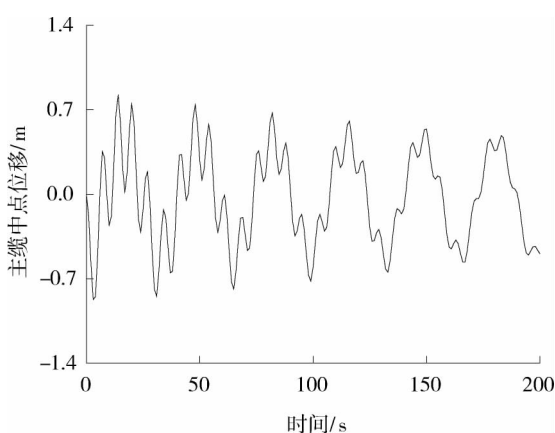


图5 主缆1/2处的位移响应曲线

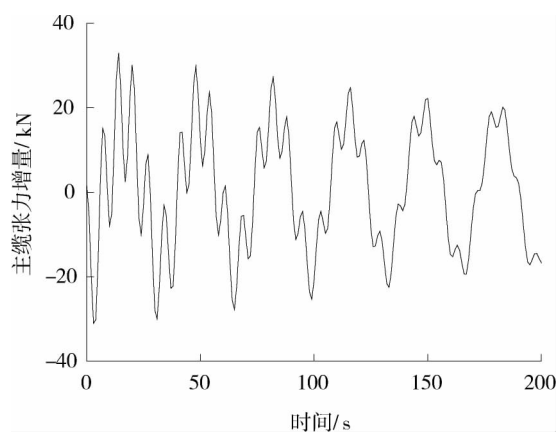


图6 主缆张力水平增量时程曲线

3.3 3号桥塔激励下主缆非线性参数振动

图7在3号桥塔的激励下主缆的幅频响应曲线和激频响应曲线,与0号桥塔激励情形类似,缆索除了能够出现主共振外,还可能发生2:1的参数共振,呈非线性特点;图8显示了3号桥塔的激励下主缆激频响应曲线,缆索的位移响应随激励幅值的增大而增大,微小桥塔位移激励可能引起缆索的大幅度振动。

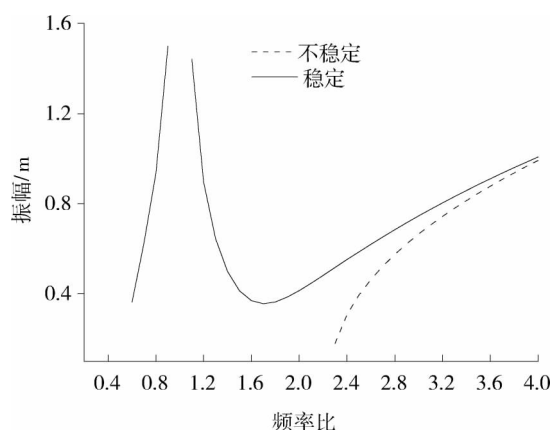


图7 主缆幅频响应曲线

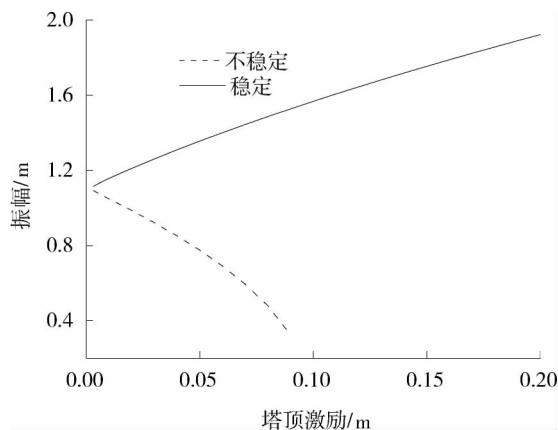


图8 3号桥塔塔顶位移与主缆振幅的关系曲线

如果3号桥塔出现第4阶振型的纵向振动,此时,塔索频率比为1.929,同样,采用4阶Runge-kutta方法对主缆参数振动方程进行数值求解,缆索初始位移取0.001 m,图9给出了缆索中点处的位移响应曲线,最大位移响应约为1.3 m,振动过程中缆索张力水平分量最大增加51.72 kN,约为缆索水平初张力的1/1 000,由于存在阻尼,振幅逐渐衰减,最后趋于稳态振动。

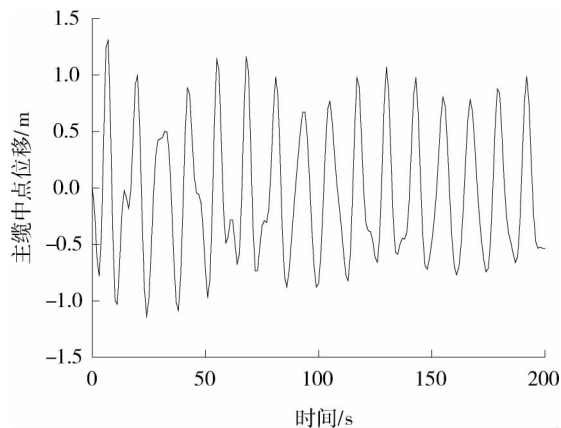


图9 主缆1/2处的位移时程

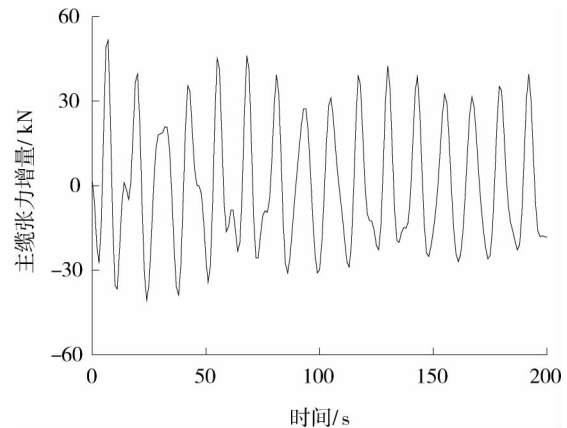


图10 主缆张力水平增量时程

4 结论

1) 当桥塔的局部振动频率约为主缆振动频率2倍左右时,主缆容易发生参数振动,桥塔微小幅振动可能激起主缆大幅度振动。

2) 0号桥塔出现第13阶模态振动时,能够激发主缆发生参数振动,主缆最大振幅约为0.9 m,振动过程中张力水平增量约为46.18 kN。

3) 3号桥塔出现第4阶模态振动时,可激发缆索参数振动,主缆最大振幅约为1.3 m,振动过程中张力水平增量约为51.72 kN。

参考文献:

- [1] 李凤臣,杨鸥,田石柱,等.基于多尺度法索-桥耦合非线性动力响应分析[J].沈阳建筑大学学报(自然科学版),2012,29(5):816-822.
- [2] Kovacs I. Zur frage der seil-schwingungen und der seildämpfung[J]. Die Bautechnik, 1982, 59(10):325-332.
- [3] 孙测世,王志攀,赵珧冰,等.两端水平激励斜拉索面内非线性振动响应[J].地震工程与工程振动,2014,24(6):122-126.
- [4] 孙测世,彭剑,赵珧冰,等.斜拉桥主梁纵向漂移对拉索非线性振动影响[J].工程力学,2014,31(11):86-91.
- [5] 亢战,钟万勰.斜拉桥参数共振问题数值研究[J].土木工程学报,1998,31(8):14-22.
- [6] 赵跃宇,吕建根.索-拱组合结构中斜拉索的非线性参数振动[J].土木工程学报,2006,39(12):67-71.
- [7] Cai Y, Chen S S. Dynamics of elastic cable under parametric and external resonances [J]. Journal of Engineering Mechanics, 1994,120(8):1786-1802.
- [8] Gattulli V, Morandini M, Paolone A. A parametric analytical modal for nonlinear dynamics in cable-stayed beam [J]. Earthquake Engineering & Structural Dynamics,2002,31(6):1281-1300.
- [9] Wu Q, Takahashi K, Nakamura S. Non-linear response of cables subjected to periodic support excitation considering cable loosening[J].Journal of sound and Vibration,2004,271(1/2):453-463.
- [10] Berlioz A, Lamarque C H. A non-linear modal for the dynamics of an inclined cable [J]. Journal of Sound and Vibration, 2005, 279(3):619-639.
- [11] Nayfeh A H. Introduction to Perturbation Techniques[M]. New-York:Wiley, 1981.
- [12] Irvine H M. Cable structure[M]. Cambridge :MIT Press, 1981.