

随机网格的刚体弹簧模型 及其断裂力学应用

赵超^{1*}, 刘波^{1,3}, 钟新谷²

(1.中国矿业大学(北京)力学与建筑学院,北京 100083;

2.湖南科技大学 土木工程学院,湖南 湘潭 411201;

3.深部岩土力学与地下工程国家重点实验室,北京 100083)

摘要:基于刚体弹簧法的基本原理,给出了一种用于模拟混凝土断裂力学问题且能够显式描述裂缝的非连续数值方法.采用刚体弹簧模型模拟混凝土,并基于 Voronoi 图生成其随机网格;采用混凝土单轴应力-应变曲线定义混凝土界面弹簧刚度,并通过能量释放率考虑混凝土受拉软化现象;采用 Mohr-Coulomb 准则判断混凝土的剪切破坏行为,并考虑了骨料咬合作用对抗剪的影响.选取典型的双边缺口板和单边缺口简支梁为研究对象,通过与试验结果对比分析验证了本文方法的有效性.结果表明:所给方法能够简单合理地模拟结构的开裂行为,对于结构的开裂模式有很好的识别能力,是分析混凝土断裂力学问题的一种可行且有效的方法.

关键词:混凝土结构;断裂力学;刚体弹簧法;裂缝扩展;Voronoi 图

中图分类号: TU93

文献标志码: A

文章编号: 1672-9102(2018)01-0035-07

Rigid-body Spring Method with Random Geometry and its Application in Fracture Mechanics

Zhao Chao¹, Liu Bo^{1,3}, Zhong Xinggu²

(1. School of Mechanics and Civil Engineering, China University of Mining and Technology (Beijing), Beijing 100083, China;

2. School of Civil Engineering, Hunan University of Science and Technology, Xiangtan 411201, China;

3. State Key Laboratory of Deep Geomechanics and Underground Engineering, Beijing 100083, China)

Abstract: A rigid body spring model with random geometry was proposed to analyze the failure process of concrete structures. In the proposed method, concrete was modeled by the rigid body spring model with random geometry. The spring stiffness of concrete was defined by the uniaxial stress-strain curve of concrete, and the shear failure behavior of concrete was judged by the Mohr-Coulomb criterion. The failure analyses of a double-edge notched plane under direct shear loading and a single-edge notched beam under two-point loading were conducted by the proposed method, and the results show that the proposed method easily describe the failure process of the concrete components from a continuum to a discontinuity, and the predicted crack pattern and bearing capacity are more close to the experimental results, which means the proposed method is feasible and effective.

Keywords: concrete structures; fracture mechanics; the rigid body spring method; crack propagation; Voronoi diagram

收稿日期: 2017-06-28

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51678235); 国家自然科学基金资助项目(41472259); “十三五”国家重点研发计划重点专项(2016YFC080250504)

*通信作者, E-mail: 287832614@qq.com

混凝土在使用过程中常会出现开裂和损伤现象.开裂和损伤的出现不但会影响混凝土的耐久性,严重时还可能危及结构安全.因此,关于混凝土结构的开裂机理和开裂模式的研究一直是国内外学者关注的焦点^[1].

数值模拟是研究混凝土开裂的一种有效手段.已有的研究大多基于有限单元法,其对裂缝的处理,一是视为单元边界,如 Hillerborg^[2]的虚拟裂缝模型;二是均匀分布到单元内部,通过调整单元刚度矩阵或本构关系来反映裂缝的总体效应,如弥散裂缝模型以及钝裂缝带模型^[3-6].将裂缝视为单元边界,需要预设裂缝位置,或者随着裂缝扩展不断更新网格,计算效率降低;将裂缝弥散到单元可以避免网格重构,却不能反映裂缝形态特征.T.Belytschko 等人^[7-8]基于有限元理论框架提出的扩展有限元法,能够兼顾了分离式裂缝和弥散裂缝的优点,但处理裂缝交叉以及多裂缝扩展时面临困难.

刚体弹簧法是 20 世纪 70 年代由日本学者 Kawai^[9]提出的一种描述连续介质转化为非连续介质的数值方法.我国学者卓家寿^[10]对其进行了较大的改进,提出采用界面均布弹簧取代集中弹簧,极大地拓展了刚体弹簧法的应用范围.刚体弹簧法的基本思想是:将结构离散成一系列刚体块并由分布在其接触面上的弹簧系统连接在一起,刚体块的材料特性通过界面弹簧刚度反映,如图 1a 所示.由于这种方法放弃了位移连续性的基本假定,且允许相邻刚体块在界面处分离或侵入,因此在模拟结构开裂时比有限元法和扩展元法更具优势,如图 1b 所示.近 10 年来,国内外学者^[11-14]开始采用刚体弹簧法研究混凝土的开裂模式以及断裂机制,并收到了很好的效果.本文在文献[10]刚体弹簧模型的基础上,引入了混凝土的断裂力学本构关系,并将其应用于双边缺口板和单缺口简支梁的断裂过程模拟中.为减小网格形状对裂缝扩展的影响,文中基于 Voronoi 图生成混凝土的随机离散网格,如图 1c 所示.试验与数值模拟的对比结果表明,本文方法能够简单合理地模拟结构的开裂行为,对于结构的开裂模式有很好的识别能力,是分析混凝土结构破坏过程的一种可行且有效的方法.

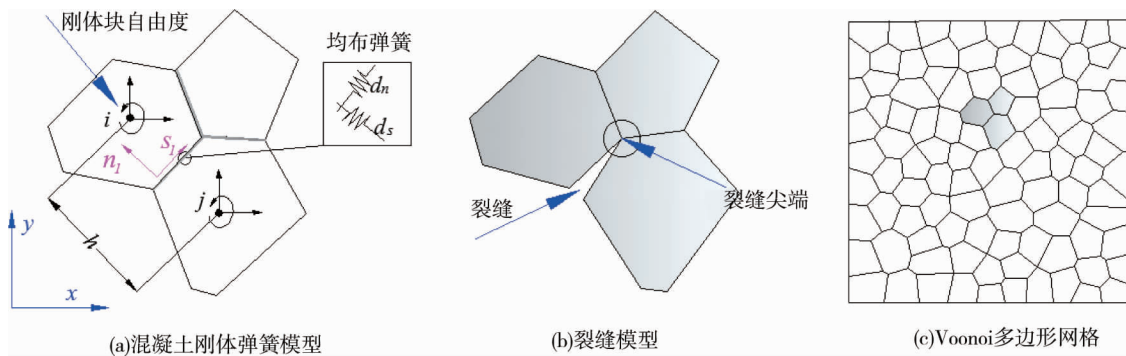


图 1 刚体弹簧模型及裂缝模拟方法

1 刚体弹簧模型

1.1 Voronoi 多边形网格

在刚体弹簧法中,混凝土裂缝的扩展需要沿着刚体块边界进行,因此网格形状对裂缝的扩展有较大影响.为了缓解网格形状对计算结果的影响,本文采用 Voronoi 图生成混凝土的离散网格.Voronoi 图^[13-14]将平面分成若干个区域,各个区域仅有 1 个点,该点所在区域内任一点到该点距离最近.如图 2 所示,实线表示 Voronoi 图,虚线表示 Delaunay 三角形,两者为对偶图.

目前 Voronoi 图技术已经较为成熟.本文中采用 MATLAB 的 Multi-Parametric Toolbox (MPT) 工具箱生成二维 Voronoi 图的单胞数据,并对单胞数据进行处理生成混凝土的刚体弹簧模型

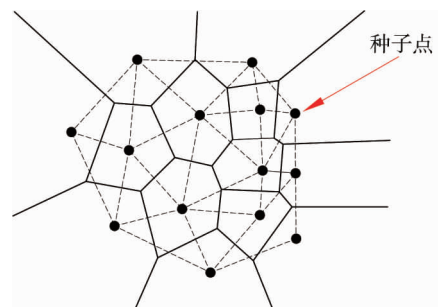


图 2 Voronoi 图及 delaunay 三角化

信息.

1.2 刚体弹簧法基本原理

混凝土采用文献[10]介绍的刚体弹簧模型模拟,即将混凝土离散成一系列刚体块,并通过界面法向和切向的均布弹簧联接,如图 1a 所示.

刚体块上任一点的位移 \mathbf{u} 由其形心的广义位移 \mathbf{u}_g 确定:

$$\mathbf{u} = [u \quad v] = \mathbf{N} \cdot \mathbf{u}_g; \quad (1)$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & (y_g - y) \\ 0 & 1 & (x - x_g) \end{bmatrix} \mathbf{u}_g = [u_g \quad v_g \quad \theta_g]^T.$$

式中: u, v 为刚体块上任一点在整体坐标系中的平动位移; \mathbf{N} 为刚体块形函数矩阵; u_g, v_g, θ_g 分别为刚体块形心的平动和转动位移; x, y 为刚体块上任一点的整体坐标; x_g, y_g 为刚体块的形心坐标.

如图 3 所示,相邻刚体块在界面上相互分离或侵入时,界面上 A 点处弹簧变形由点 A_1 和 A_2 的相对位移确定,

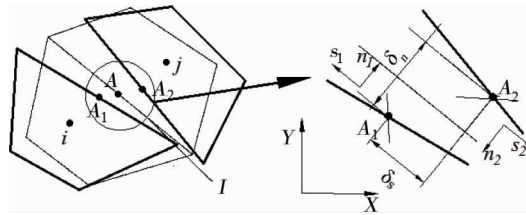


图 3 弹簧变形

$$\boldsymbol{\delta} = [\delta_n \quad \delta_s]^T = -\mathbf{L}(u_{A_1} - u_{A_2}); \quad (2)$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \cos(\mathbf{n}_1, \mathbf{x}) & \cos(\mathbf{n}_1, \mathbf{y}) \\ \cos(\mathbf{s}_1, \mathbf{x}) & \cos(\mathbf{s}_1, \mathbf{y}) \end{bmatrix}.$$

式中: δ_n, δ_s 为界面上任一点 A 的法向和切向弹簧变形; u_{A_1}, u_{A_2} 为点 A_1, A_2 的刚体位移; \mathbf{L} 为图 3 中所示局部坐标与整体坐标系之间的转换矩阵.

界面弹簧刚度及弹簧力为

$$\mathbf{T} = [\sigma_n \quad \tau_s]^T = \mathbf{D}\boldsymbol{\delta}; \quad (3)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_n & 0 \\ 0 & d_s \end{bmatrix};$$

$$d_n = \frac{E}{h}, \quad d_s = \frac{E}{2(1 + \lambda)h}.$$

式中: σ_n, τ_s 为点 A 的法向和切向弹簧力; \mathbf{D} 为界面的弹簧刚度矩阵; d_n, d_s 为界面上法向和切向弹簧刚度. E 为混凝土弹性模量, λ 为泊松比; h 为相邻刚体块到界面的垂直距离,如图 1a 所示.

结构的能量平衡方程为

$$\sum_r \iint_{S_0^r} \frac{1}{2} T^{(i)} \delta^{(i)} ds = \sum_e \iiint_{\Omega^e} f_i u_i d\Omega + \iint_{S_e^r} P_i u_i ds. \quad (4)$$

式中: Ω^e 为结构定义域; S_e^r 为应力边界条件; S_0^r 为界面弹簧单元; f_i, P_i 为材料自重和外加荷载.(规定:上标 (i) 表示所属的界面单元编号,下标 i 表示所属的刚体块编号.)

应用最小势能原理得到结构的整体平衡方程组,

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{U}_g = \mathbf{R}. \quad (5)$$

式中: \mathbf{R} 为结构荷载列阵; \mathbf{U}_g 为结构整体位移列阵; \mathbf{K} 为结构刚度矩阵.

2 混凝土的材料本构

刚体弹簧模型通过界面上的均布弹簧反映材料的力学特性,法向弹簧反映混凝土的拉压性能,切向弹簧反映混凝土剪力传递机理.混凝土界面弹簧的刚度矩阵 \mathbf{D} 可以表示为割线模量 E 和泊松比 λ 的函数,因此可以通过调整这 2 个参数来反映材料的非线性特征.

2.1 混凝土的拉压本构

混凝土的割线模量 E 可以通过图 4 给出的混凝土的单轴应力-应变曲线^[15]定义.

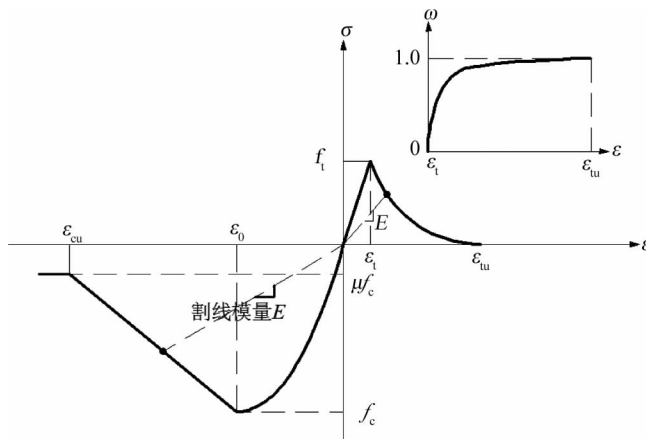


图 4 混凝土单轴应力-应变关系曲线

受压段表达式为

$$\sigma = \begin{cases} E_0 \varepsilon - \frac{E_0}{2\varepsilon_0} \varepsilon^2 & (\varepsilon < \varepsilon_0); \\ f_c - \frac{(f_c - \mu f_c)}{(\varepsilon_{cu} - \varepsilon_0)} (\varepsilon - \varepsilon_0) & (\varepsilon_0 \leq \varepsilon < \varepsilon_{cu}); \\ \mu f_c & (\varepsilon > \varepsilon_{cu}). \end{cases} \quad (6)$$

式中: $\varepsilon = \delta_n/h$ 为混凝土法向应变; f_c 为混凝土单轴抗压强度标准值; E_0 为混凝土初始弹性模量; $\varepsilon_0 = 2f_c/E_0, \varepsilon_{cu} = 4\varepsilon_0, \mu = 0.2$.

考虑混凝土受拉软化现象,受拉段表达式为

$$\sigma = (1 - \omega) E_0 \varepsilon. \quad (7)$$

式中:

$$\omega = \begin{cases} 0 & (\varepsilon \leq \varepsilon_t); \\ 1 - \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon} \exp\left[-\kappa \frac{(\varepsilon - \varepsilon_t)}{(\varepsilon_w - \varepsilon_t)}\right] & (\varepsilon > \varepsilon_t). \end{cases}$$

$\varepsilon_t = f_t/E_0$; f_t 为混凝土单轴抗拉强度标准值; κ 取 4.605 2; ε_w 为混凝土极限拉应变,由下式近似计算^[16],

$$\varepsilon_w = \frac{5G_f}{f_t h}.$$

式中: G_f 为能量释放率,即产生单位长度裂缝所需的能量; h 为相邻刚体块到界面的垂直距离,如图 1a 所示.

2.2 混凝土的剪切破坏准则及开裂本构

剪切弹簧反映混凝土剪力传递机理,其极限抗剪强度由 Mohr-Coulomb 准则确定,如图 5 所示,其数学

表达如式(8).

$$|\tau_s| \geq c - \sigma_n \tan \varphi. \tag{8}$$

式中: c, φ 分别为混凝土的粘聚力和内摩擦角.

压剪破坏时,界面弹簧刚度矩阵为

$$D = \begin{bmatrix} d_n & 0 \\ 0 & \chi d_s \end{bmatrix}. \tag{9}$$

式中: χ 为考虑骨料咬合作用的剪切刚度折减系数.

拉剪破坏时,界面弹簧刚度矩阵为

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \chi d_s \end{bmatrix}. \tag{10}$$

χ 采用文献^[17]给出的方法确定,

$$\chi = 1 \quad (\varepsilon_n < \varepsilon_{in}); \tag{11}$$

$$\chi = 0.4 / (\varepsilon_n / \varepsilon_{in}) \quad (\varepsilon_n \geq \varepsilon_{in}).$$

式中: ε_{in} 为混凝土极限拉应变.

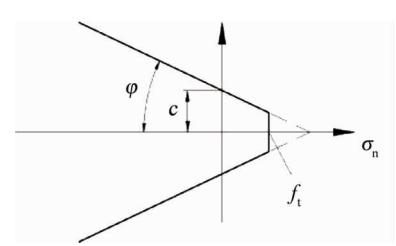


图 5 Mohr-Coulomb 准则

3 试验与数值模拟对比

3.1 双边缺口板的模拟

采用本文方法分析文献[18]中的双边缺口板试验.试件的几何尺寸及加载试验方案如图 6a 所示,相应的刚体弹簧模型如图 6b 所示,混凝土的抗拉(f_t)和抗压强度(f_c)分别为 3.0 MPa 和 38.4 MPa,弹性模量 E_0 为 32.8 GPa,泊松比 λ_0 为 0.2,粘聚力 c 为 5.1 MPa,内摩擦角 φ 为 62.5°,能量释放率 G_f 为 110 N/m.文献[18]试验获得的加载值 P 为 27.50 kN,本文数值模拟结果为 29.45 kN,试验和数值模拟的缺口板开裂模式如图 7 所示,各开裂面弹簧破坏模式统计数据见图 8 所示.

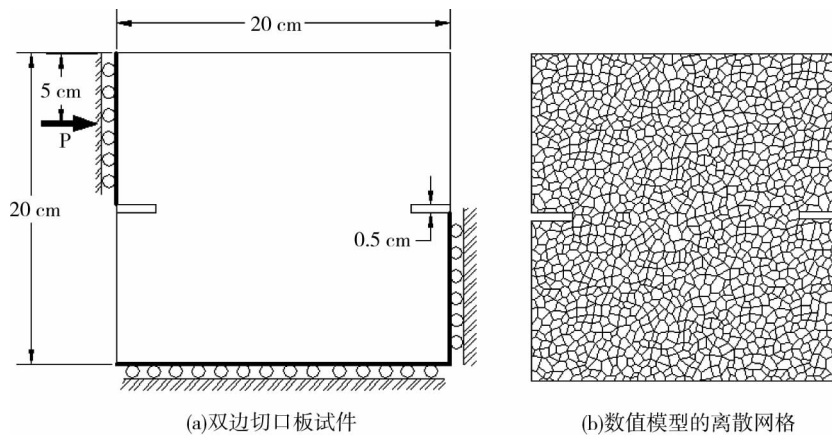


图 6 试件几何尺寸及数值离散模型

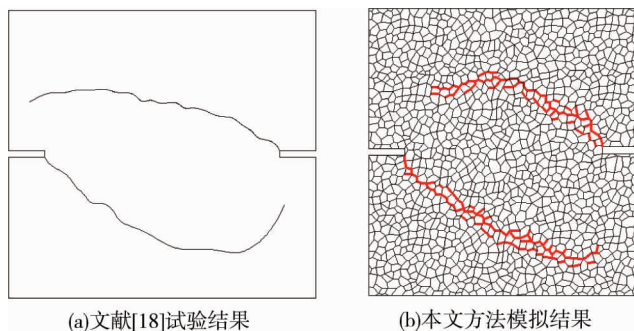


图 7 试验和数值模拟结果对比

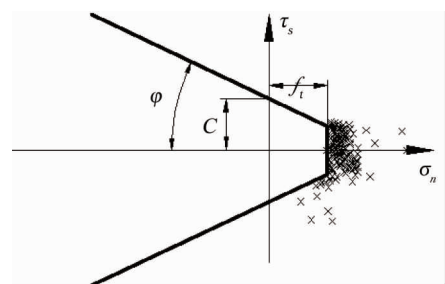


图 8 界面弹簧开裂模式统计

3.2 单边缺口简支梁的模拟

文献[19]基于单边缺口梁对混凝土的混合开裂模式进行了试验研究.试验梁的外形尺寸以及加载方案见图9a,本文的数值模型见图9b,混凝土的材料特性见表1.试验和数值模拟的裂缝模式见图9c和图9d.

表1 单边缺口简支梁的混凝土材料参数

f_t /MPa	f_c /MPa	E_0 /GPa	λ_0	c /MPa	φ	G_T /(N/m)
3.5	38.4	30.0	0.18	5.1	62.5°	140

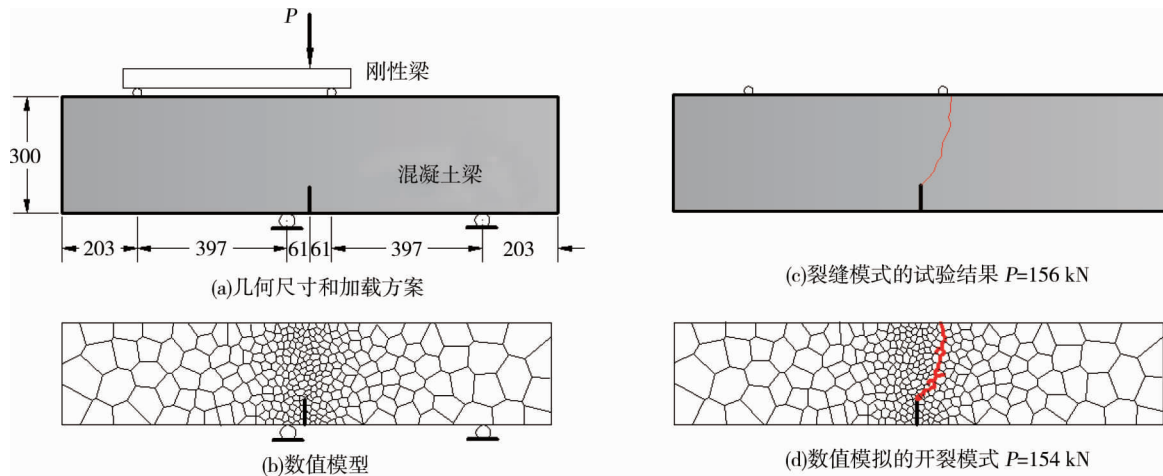


图9 单边切口简支梁/mm

图7和图9表明:本文方法预测的结构开裂模式、裂缝特征以及破坏荷载与试验结果基本吻合.图8表明,本文模型中绝大部分破坏界面是由法向弹簧受拉破坏造成.

4 结论

1) 本文方法能够简单合理地模拟结构的开裂行为,对于结构的开裂模式有很好的识别能力,是分析混凝土结构破坏过程的一种可行且有效的方法.

2) 基于Voronoi单元的刚体弹簧模型能够较为准确地模拟钢筋混凝土结构的破坏过程,对于裂缝分布和形态的描述与真实情况较为接近.即使在破坏模式不能假定的情况下该方法也有很好的预测结果,充分体现了非连续数值方法在描述开裂问题时的优势.

参考文献:

- [1] 苏静波,范晓晨,邵国建.几何非线性扩展有限元法及其断裂力学应用[J].工程力学,2013,30(4):42-46.
- [2] Hillerborg A, Modeer M, Petersson P E. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements[J]. Cement and Concrete Research, 1976,6(6):773-781.
- [3] 钟新谷.单拱面预应力混凝土系杆拱桥极限承载力分析[D].长沙:长沙铁道学院,1997.
- [4] 文颖,曾庆元.平面框架弹塑性分析的增量内力塑性系数法[J].中南大学学报(自然科学版),2012,43(6):2295-2299.
- [5] Ors D M F, Okail H O, Zaher A H. Modeling of shear deficient beams by the mixed smeared/discrete cracking approach[J]. Housing and Building National Research Center, 2016, 12(2): 123-136.
- [6] Wang T, Dai J G, Zheng J J. Multi-angle truss model for predicting the shear deformation of RC beams with low span-effective depth ratios[J]. Engineering Structures, 2015, 91: 85-95.
- [7] Belytschko T, Black T. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1999, 45: 601-620.

- [8] Belytschko T, Krongauz Y, Fleming M, et al. Smoothing and accelerated computations in the element-free galerkin method [J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 1996, 74(1/2): 111-126.
- [9] Kawai T. New element models in discrete structural analysis[J]. *Journal of the Society of Naval Architects of Japan*, 1977, 141(2): 187-193.
- [10] 卓家寿,赵宁.不连续介质静、动分析的刚体-弹簧元法[J].*河海大学学报*,1993,21(5): 34-43.
- [11] Bolander J E, Hong G S, Yoshitake K. Structural concrete analysis using rigid-body-spring networks[J]. *Computer -Aided Civil and Infrastructure Engineering*, 2000, 15: 120-133.
- [12] Bolander J E, Saito S. Fracture analyses using spring networks with random geometry[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 1998, 61(5): 569-591.
- [13] Yao C, Jiang Q H, Shao J F. Numerical simulation of damage and failure in brittle rocks using a modified rigid block spring method[J]. *Computers and Geotechnics*, 2015, 64: 48-60.
- [14] 刘玉擎,陈艾荣.石拱桥的有限弹簧法分析及其安全性评价[J].*土木工程学报*,2003,36(8): 69-73.
- [15] 聂建国,王宇航. ABAQUS 中混凝土本构模型用于模拟结构静力行为的比较研究[J].*工程力学*,2013,30(4):59-82.
- [16] Owen D R J, Figueiras J A, Damjanic F. Finite element analysis of reinforced and prestressed concrete structures including thermal loading[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1983, 41(3): 323-366.
- [17] Bazant Z P. Slip-Dilatancy model for crack reinforced concrete[J]. *ASCE*, 1980,106(9): 1947-1966.
- [18] Ozbolt J, Reinhardt H W. Numerical study of mixed mode fracture in concrete[J]. *International Journal of Fracture*, 2002, 118(2): 145-162.
- [19] Nooru-Mohamed M B. Mixed-mode fracture of concrete: an experimental approach[J]. *Thesis Technische Univ*, 1992.