doi:10.13582/j.cnki.1672-9102.2018.01.018

直径为 2 与 3 的符号图的上可嵌入

唐楚彪,吕胜祥*

(湖南科技大学 数学与计算科学学院,湖南 湘潭 411201)

摘　要:设 $\Sigma=(G,\sigma)$ 是直径为 2 和 3 连通的简单符号图,G 是 Σ 的基础图.若 Σ 扭转等价 Δ_2 - 图或 Δ_3 - 图,则 Σ 的 Betti 亏数 $\xi(\Sigma)=2$,否则 Σ 是上可嵌入的,即 $\xi(\Sigma)\leqslant 1$.

关键词:符号图;上可嵌入;Betti 亏数

中图分类号:O157.5　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-9102(2018)01-0109-05

The Upper Embeddable of Signed Graphs with Diameter two and three

Tang Chubiao, Lyu Shengxiang

(School of Mathematics and Computational Science, Hunan University of Science and Technology, Xiangtan 411201, China)

Abstract: Let $\Sigma=(G,\sigma)$ be a simple signed graph with diameter two and three, G is the underlying graph of Σ. If Σ is switched to be equivalent of Δ_2 - graph or Δ_3 - graph, then betti deficiency number $\xi(\Sigma)=2$, otherwise Σ is upper-embeddable, i.e., $\xi(\Sigma)\leqslant 1$.

Keywords: signed graph; up-embeddable; betti deficiency number

1　图的基本概念

本文所研究的图 $G=(V(G),E(G))$ 都是有限、无环、无重边的连通图.图 G 中连结顶点 u 和 v 之间最短路的长度,称为顶点 u 和 v 之间的距离 $d_G(u,v)$.图 G 所有顶点间距离的最大值称为图 G 的直径,记作 $d(G)$.令 $\beta(G)=|E(G)|-|V(G)|+1$ 为 G 的圈秩数(或 Betti 数).

令 S 为可定向的闭曲面.图 G 在曲面 S 上的 2-胞腔嵌入是指 G 能画在曲面 S 上使得边与边之间除顶点外不再相交,且在曲面 S 上去掉 G 的顶点与边之后的每个连通分支都同胚于开圆盘.图 G 的最大亏格 $\gamma_M(G)$,等于这样的最大的整数 k,使得 G 可 2-胞腔嵌入到亏格为 k 的可定向曲面 S 上.

图 G 的任意 2-胞腔嵌入至少含有一个面,根据 Euler 公式,可得 $\gamma_M(G)\leqslant\lfloor\beta(G)/2\rfloor$(其中,$\lfloor x\rfloor$ 表示不超过 x 的最大整数).特别的,当 $\gamma_M(G)=\lfloor\beta(G)/2\rfloor$,我们称图 G 是上可嵌入的.

令 $A\subseteq E(G)$,我们用 $G\backslash A$ 表示从 G 中去掉边集 A 所得到的图,$c(G\backslash A)$ 表示 $G\backslash A$ 的所有连通分支的个数,$b(G\backslash A)$ 表示 $G\backslash A$ 的 Betti 数为奇数的连通分支的个数.令 T 为图 G 的一棵生成树,用 $\xi(G,T)$ 表示 $G\backslash E(T)$ 的边数为奇数的连通分支的个数.对图 G 的所有生成树 T,我们称 $\xi(G)=\min_T\xi(G,T)$ 为图 G 的 Betti 亏数.显然,$\xi(G)\equiv\beta(G)(\mathrm{mod}2)$.

Xuong[1]得到了下面的刻画图的最大亏格的重要定理.

收稿日期:2015-06-06

基金项目:国家自然科学基金资助项目(11301171);数学天元基金资助项目(11226284);湖南省自然科学基金资助项目(13JJ4079;14JJ7047)

*通信作者,E-mail:lvsxx23@126.com

定理1(Xuong[1])设图 G 是1个连通图,则

1) $\gamma_M(G)=(\beta(G)-\xi(G))/2$;

2)图 G 是上可嵌入的当且仅当 $\xi(G)\leqslant 1$.

Nebesky[2]从另一个方面给出了图的最大亏格的计算公式.

定理2(Nebesky[2])设图 G 是1个连通图,则

1)图 G 是上可嵌入的,当且仅当 $c(G\backslash A)+b(G\backslash A)-2\leqslant |A|$,其中 A 为 $E(G)$ 的任意子集;

2) $\xi(G)=\max\{c(G\backslash A)+b(G\backslash A)-|A|-1\}$.

式中:A 为 $E(G)$ 的任意子集.

设 $F_1,F_2,\cdots,F_k$ 为图 G 的 $k(k\geqslant 2)$ 个不同的子图,$E_G(F_1,F_2,\cdots,F_k)$ 表示边集 $E(G)$ 中一个端点在 $V(F_i)$ 中,而另一个端点在 $V(F_j)(1\leqslant i,j\leqslant k,i\neq j)$ 中的边的集合,$E(F_i,G)$ 表示边集 $E(G)$ 中一个端点在 $V(F_i)$ 中,而另一个端点不在 $V(F_i)$ 中的边的集合 $(1\leqslant i\leqslant k)$.在定理1和定理2的基础上,黄元秋教授[6]得到了下面的结论.

定理3[6] 对于图 G,如果 $\xi(G)\geqslant 2$,即 G 不是上可嵌入的,则必存在边子集 $A.E(G)$ 满足下列性质:

1) $c(G\backslash A)=b(G\backslash A)\geqslant 2$;

2) $G\backslash A$ 的任一连通分支 F 都是图 G 的顶点导出子图;

3)对于 $G\backslash A$ 任意 k 个不同的连通分支 $F_1,F_2,\cdots,F_k$ 有 $|E_G(F_1,F_2,\cdots,F_k)|\leqslant 2k-3$,特别地,对于 $G\backslash A$ 任意2个不同的连通分支 F 和 H 有 $|E_G(F,H)|\leqslant 1$;

4) $\xi(G)=2c(G\backslash A)-|A|-1$.

图的最大亏格是图的一个重要参数,是拓扑图论的重要研究问题.关于图的直径与最大亏格下界的关系,也得到了很多图论学者的重视.

定理4[7] 每个直径为2的无环连通图都是上可嵌入的.

文献[6]讨论了直径为3的图.

定理5[6] 如果图 G 是直径为3的连通图,那么图 G 是上可嵌入的,除非图 G 是 Δ_2-图和 Δ_3-图并且 $\xi(G)=2$.

2 符号图的概念与定理

符号图[8] $\Sigma=(G,\sigma)$ 是指图 G 与映射 $\delta:E(G)\to\{+,-\}$ 使得图 G 的每条边都被赋予符号+或-.符号图 $\Sigma=(G,\sigma)$ 中的迹 $w=v_0e_1\cdots e_kv_k$ 的符号等于其中所有边的符号的乘积,即 $\sigma(w)=\sigma(e_1e_2\cdots e_k)=\sigma(e_1)\sigma(e_2)\cdots\sigma(e_k)$.若圈 C 上的符号为正,则称圈 C 是平衡圈;当符号图 $\Sigma=(G,\sigma)$ 只有平衡圈时,则称 $\Sigma=(G,\sigma)$ 是平衡的.

连通图 G 的2-胞腔嵌入是由其增广嵌入系 (P,λ) 确定的,其中 P 是 G 的旋系,λ 是每条边上的标号[9].于是,2-胞腔嵌入自然地可以认为是符号图的嵌入.图 Σ 的圈 C 嵌入到曲面上是定向保持的当且仅当 C 是平衡的,即圈 C 上的边的标号的乘积等于+.如果2个符号图的基础图相同,且平衡圈集也相同,则称这两个符号图是等价的的.

在符号图 $\Sigma=(G,\sigma)$ 中,设 $\boldsymbol{X}\subseteq V(G)$,那么 $V\backslash X$ 表示从 G 中删除 X 中的顶点以及与这些顶点相关联的边所得到的子图;$[X,V\backslash X]$ 表示一个端点在 X 中,另一个端点在 $V\backslash X$ 中的边的集合.在符号图 $\Sigma=(G,\sigma)$ 与 $\Sigma'=(G,\sigma')$ 中,如果存在顶点集 $\boldsymbol{X}\subseteq V(G)$,使得当 $e\in[X,V\backslash X]$ 时,$\sigma(e)=-\sigma'(e)$,当 $e\notin[X,V\backslash X]$ 时,$\sigma(e)=\sigma'(e)$,则称 $\Sigma=(G,\sigma)$ 与 $\Sigma'=(G,\sigma')$ 是扭转等价的,记作 $\Sigma=(G,\sigma)\sim\Sigma'=(G,\sigma')$.若 $\Sigma=(G,\sigma)\sim\Sigma'=(G,\sigma')$,也称 $\Sigma=(G,\sigma')$ 是 $\Sigma=(G,\sigma)$ 在顶点集 $\boldsymbol{X}$ 上的扭转.扭转等价不改变平衡圈集,因此这两个符号图是等价的.于是,若 $\Sigma=(G,\sigma)$ 是连通的符号图,T 是其对应的生成树,则通过扭转点集 $\boldsymbol{X}$,使得 T 上的边全是正的,且其余的边上的符号是唯一确定的.

符号图 $\Sigma=(G,\sigma)$ 的准亏格 $d(G,\sigma)$ 是指最小的整数 k,使得 (G,σ) 可定向嵌入到 Euler 亏格为 k

的曲面.(G,σ) 在曲面 S 上满足 $d(G,\sigma)=d(S)$ 的定向嵌入称为最小定向嵌入.图 G 的所有符号图的准亏格的最大值记作 $D(G)$[10].

设 T 是连通符号图 $\Sigma=(G,\sigma)$ 的生成树, T 是 $\Sigma=(G,\sigma)$ 的生成树且 T 上的边全是正的,$C=\Sigma\backslash E(T)$,D 是 C 的一个连通分支且满足:

1) D 中边的数目为奇数;

2) D 中的负边都是桥;

3)去掉 D 中任意一条负边,D 正好有两个含有奇数条边的连通分支.

则称 D 为 $\Sigma\backslash E(T)$ 的奇分支,并记 $C=\Sigma\backslash E(T)$ 中连通奇分支的个数为 $\xi(\Sigma,T)$. 文献[10]给出了 $\xi(\Sigma)$ 的组合表达式:

定理 6[10]　设 $\Sigma=(G,\sigma)$ 是连通的符号图,$\xi(\Sigma)$ 为 Betti 亏数,那么

$\xi(\Sigma)=\min\{\xi(\Sigma,T);T$ 是 G 的生成树$\}$.

符号图 $\Sigma=(G,\sigma)$ 中最大的 2-边连通子图称为 $\Sigma=(G,\sigma)$ 的叶子.若 L 平衡且 $\beta(L)$ 为奇,则符号图 H 的叶子或 L 分支称为本质的, H 的本质叶子的数目记作 $el(H)$.

定理 7[10]　如果 $\Sigma=(G,\sigma)$ 是连通的符号图,那么

$\xi(\Sigma)=\max\{\mathrm{el}(\Sigma\backslash A)-|A|;A$ 是 $E(\Sigma)$ 的子集$\}$.

令 $A\subseteq E(\Sigma)$,$c(G\backslash A)$ 表示图 $\Sigma\backslash A$ 中连通分支数; $\mathrm{ec}(\Sigma\backslash A)$ 表示图 $\Sigma\backslash A$ 中连通本质分支数.

定理 8[10]　设 $\Sigma=(G,\sigma)$ 为符号图,则 $\xi(\Sigma)=\max\{c(\Sigma\backslash A)+\mathrm{ec}(\Sigma\backslash A)-|A|-1\}$, 其中,$A$ 为 $E(\Sigma)$ 的子集.

本文中有关图的最大亏格的术语均可参考[1].

设简单的符号图 F_1 和 F_2 的 Betti 数均为奇,且存在 $u_i\in V(F_i)$;$i=1,2$ 使得对任意 $x_i\in V(F_i)$ 且 $x_i\neq u_i$,x_i 与 u_i 相邻.那么 Δ_2 - 符号图由连接 u_1 和 u_2 获得(见图 1).即$V(\Delta_2)=V(F_1)\cup V(F_2)$,$E(\Delta_2)=E(F_1)\cup E(F_2)\cup\{u_1u_2\}$.

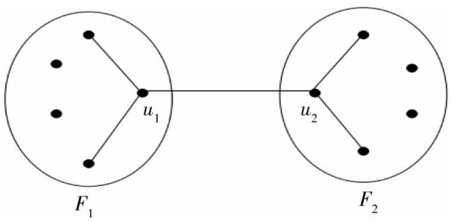

图 1　Δ_2-符号图

设 Σ_1,Σ_2 和 Σ_3 是 3 个简单的符号图,各自的 Betti 数为奇,并存在 $u_i,v_i\in V(\Sigma_i)$;$i=1,2,3$(可能 u_i 等于 v_i)使得对任意 $x_i\in V(\Sigma_i)$ 且 $x_i\neq u_i,v_i$,x_i 与 u_i 和 v_i 相邻.那么 Δ_3 - 符号图由连接 u_1 和 u_2,v_1 和 u_3,v_2 和 v_3 获得(见图 2).即 $V(\Delta_3)=\bigcup_{i=1}^{3}V(\Sigma_i)$,$E(\Delta_3)=\bigcup_{i=1}^{3}E(\Sigma_i)\cup\{u_1u_2,v_1u_3,v_2v_3\}$.

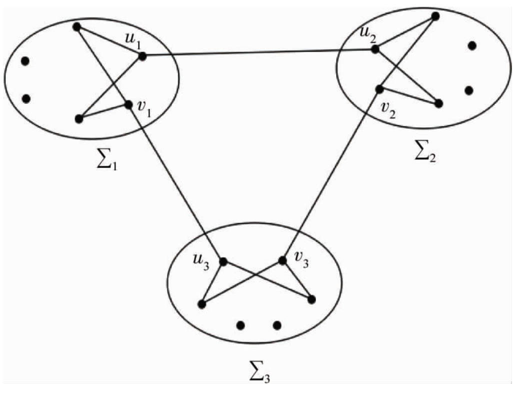

图 2　Δ_3-符号图

若 Δ_2-符号图(或 Δ_3-符号图)经过扭转后,所有边都为正边,则称其为 Δ_2-图(或 Δ_3-图).

设 $\Sigma=(G,\sigma)$ 是符号图,$\beta(\Sigma)=1(\mathrm{mod}2)$, 若存在 $u,v\in V(\Sigma)$(可能 $u=v$),使得对任意 $x_i\in V(\Sigma)$ 且 $x_i\neq u,v$,x_i 与 u 和 v 相连,即 $\Sigma=S\vee K_2^C$(或 $\Sigma=S\vee u$), 则通过扭转,则存在 Σ 中的生成树 T(T 的边

全为正)，使得去掉 $\Sigma\backslash E(T)$ 中的负边后只存在唯一的分支.

引理 1　令 $\Sigma = S \vee K_2^C$(或 $\Sigma = S \vee u$)为符号图，$\beta(\Sigma) = 1(\bmod 2)$，则 $\xi(\Sigma) \leqslant 1$.

证　$\Sigma = S \vee K_2^C$(或 $\Sigma = S \vee u$)，那么通过扭转，Σ 中存在生成树 T(树 T 的边全为正)，使得只有 $\Sigma\backslash E(T)$ 中存在负边.

1)若 $\Sigma\backslash E(T)$ 中不存在负边，则由文献[6]可知 $\xi(\Sigma) = 1$.

2)若 $\Sigma\backslash E(T)$ 中存在唯一负边，令 e 为这条负边.

当 $u = v$ 时，存在 Σ 中的生成树 T(T 的边全为正)，使得 $\Sigma\backslash E(T)$ 存在负边，且 $\Sigma\backslash E(T)$ 含有 u，$H = \{\Sigma\backslash E(T)\}\backslash\{e\}$ 连通，因为 $\beta(\Sigma) = 1(\bmod 2)$，所以 $\beta(H) = 0(\bmod 2)$，并且 e 有如下 3 种情况：

① e 连通 H 中的 2 个点，由奇分支的定义可知 $\xi(H + e) = 0$，因此 $\xi(\Sigma) = 0$；

② e 连通 H 和 H 外的某个点，由奇分支的定义可知 $\xi(H + e) = 0$，因此 $\xi(\Sigma) = 0$；

③ e 连通 H 外的某两个点，由奇分支的定义可得 $\xi(\Sigma) = 0$.

因此，当 $\Sigma\backslash E(T)$ 中存在一条负边，并且 $\Sigma\backslash E(T)$ 除去负边后存在唯一的分支，则 $\xi(\Sigma) = 0$.

当 $u \neq v$ 时，同理可得 $\xi(\Sigma) = 0$.

3)若 $\Sigma\backslash E(T)$ 不止一条负边时，相似的，存在 Σ 中的生成树 T(T 的边全为正)，使得 $\Sigma\backslash E(T)$ 除去负边后存在唯一的分支，且 $\xi(\Sigma) = 0$.

在 Δ_3-符号图中，因为图 Σ 直径为 3，所以在 Σ_1，Σ_2 和 Σ_3 这 3 个简单的符号图中至少有 1 个图中 $u_i = v_i$.那么由定理 9 和参考文献[6]得到下面引理.

引理 2　令 $\Sigma = \Delta_2$ - 符号图(或 $\Sigma = \Delta_3$ - 符号图). 若 Σ 与 Δ_2 - 图(或 Δ_3 - 图)扭转等价，则 $\xi(\Sigma) = 2$；否则 $\xi(\Sigma) \leqslant 1$.

证　1)设 Σ 是 Δ_2 - 符号图，如图 1 所示和 Δ_2 - 符号图的定义，边 u_1u_2 符号是任意的，如果是负边，则可以通过扭转，使 $\Sigma \sim \Sigma'$，并且 Σ' 中 u_1u_2 为正边.

当 Σ' 是 Δ_2 - 图时，由文献[6]得 $\xi(\Sigma') = 2$，即 $\xi(\Sigma) = 2$.

当 Σ' 不是 Δ_2 - 图时，设 $\Sigma' = F'_1 \cup F'_2 \cup \{u_1u_2\}$，则至少存在 1 个 F'_i 中有负边，由引理 1 可得至少存在 1 个 $\xi(F'_i) = 0$，又因为 $\beta(\Sigma) = 1(\bmod 2)$，那么容易得到 $\xi(\Sigma') \leqslant 1$，即 $\xi(\Sigma) \leqslant 1$.

2)当 $\Sigma = \Delta_3$ - 符号图时(图 2)，根据 Δ_3 - 符号图的定义，边 u_1u_2，v_2v_3 和 v_1u_3 符号是不确定的.若边 u_1u_2，v_2v_3 和 v_1u_3 中至少有一条边的符号为负，则通过扭转可得到 $\Sigma \sim \Sigma'$，其中 Σ' 中 u_1u_2，v_2v_3 和 v_1u_3 都为正边.

当 Σ' 是 Δ_3 - 图时，由文献[3]得 $\xi(\Sigma') = 2$，即 $\xi(\Sigma) = 2$.

当 Σ' 不是 Δ_3 - 图时，设 $\Sigma' = \Sigma'_1 \cup \Sigma'_2 \cup \Sigma'_3 \cup \{u_1u_2, v_2v_3, v_1u_3\}$，则至少存在 1 个 Σ'_i 中有负边，由引理 1 可得至少存在 1 个 $\xi(\Sigma'_i) = 0$，不妨设 $\xi(\Sigma'_1) = 0$，通过 Δ_3 - 符号图的定义和引理 1，存在 Σ'_i 的生成树 T'_i 使得 $\Sigma'_i\backslash T'_i$ 包含 u_i，且 $\xi(\Sigma'_1) = 0$，$\xi(\Sigma'_2) \leqslant 1$ 和 $\xi(\Sigma'_3) \leqslant 1$，那么选择图 Σ' 的树 $T' = T'_1 \cup T'_2 \cup T'_3 \cup \{v_1u_3, u_2v_3\}$，我们容易得到 $\xi(\Sigma', T') \leqslant 1$，因此 $\xi(\Sigma') \leqslant \xi(\Sigma', T') \leqslant 1$，即 $\xi(\Sigma) \leqslant 1$.

3　结论

由符号图和非符号图的 Betti 亏数的定义，以及上面的定理可知：

推论 1　设 $\Sigma = (G, \sigma)$ 为符号图，则图 Σ 的 Betti 亏数小于等于图 G 的 Betti 亏数，即 $\xi(\Sigma) \leqslant \xi(G)$.

证　设 $\Sigma = (G, \sigma)$，$\forall A \subseteq E(G)$，根据本质分支的定义，易知 Betti 数为奇数的连通分支不一定是本质的，故成立 $ec(\Sigma\backslash A) \leqslant b(G\backslash A)$. 于是，结合定理 2 和定理 8，$\forall A \subseteq E(G)$，$\xi(\Sigma) \leqslant \xi(G)$.

定理 9　直径为 2 的连通符号图 Σ 是上可嵌入的，即 $\xi(\Sigma) \leqslant 1$.

证　令 $\Sigma = (G, \sigma)$，则图 G 为直径为 2.根据定理 4，$\xi(G) \leqslant 1$. 于是，结合推论 1，得到 $\xi(\Sigma) \leqslant \xi(G) \leqslant 1$，故图 Σ 是上可嵌入的.

定理 10　令连通符号图 $\Sigma = (G, \sigma)$ 的直径为 3.

1)若 $\Sigma \neq \Delta_2$-符号图(或 $\Sigma \neq \Delta_3$-符号图),则 Σ 是上可嵌入的,即 $\xi(\Sigma) \leqslant 1$;

2)若 $\Sigma = \Delta_2$ - 符号图(或 $\Sigma = \Delta_3$ - 符号图),且图 Σ 扭转等价于 Δ_2 - 图(或 Δ_3 - 图),则 Σ 的 Betti 亏数 $\xi(\Sigma) = 2$, 否则 $\xi(\Sigma) \leqslant 1$.

证　令 $\Sigma = (G,\sigma)$, 显然, G 的直径为 3.

1)若 $G \neq \Delta_2$-图(或 $G \neq \Delta_3$ - 图), 根据定理 5,则图 G 是上可嵌入的,即 $\xi(G) \leqslant 1$. 结合推论 1, $\xi(\Sigma) \leqslant \xi(G) \leqslant 1$, 即图 Σ 是上可嵌入的, $\xi(\Sigma) \leqslant 1$.

2)若 $G = \Delta_2$-图(或 $G = \Delta_3$ - 图), 那么图 Σ 为 Δ_2-符号图或 Δ_3 - 符号图. 根据引理 2 可知,若图 Σ 扭转等价 Δ_2 - 图或 Δ_3 - 图,则图 Σ 的 Betti 亏数 $\xi(\Sigma) = 2$, 否则 $\xi(\Sigma) \leqslant 1$. 证毕.

参考文献:

[1] Xuong N H. Upper-embeddable graphs and related topics[J]. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 1979, 26(2): 226-232.

[2] Nebesky L. A new characterization of the maximum genus of a graph[J]. Czechoslovak Mathematical Journal, 1981, 31(4): 604-613.

[3] Huang Y, Liu Y. The maximum genus of graphs with diameter three[J]. Discrete mathematics, 1999,194(1/3): 139-149.

[4] Škoviera M. The maximum genus of graphs of diameter two[J]. Discrete Mathematics, 1991, 87(2): 175-180.

[5] Širáň J, Škoviera M. Characterization of the maximum genus of a signed graph[J]. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 1991, 52(1): 124-146.

[6] Jungerman M. A characterization of upper-embeddable graphs[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1978, 241: 401-406.

[7] Xuong N H. How to determine the maximum genus of a graph[J]. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 1979, 26(2): 217-225.

[8] Stahl S. Generalized embedding schemes[J]. Journal of Graph Theory, 1978, 2(1): 41-52.

[9] Lv S, Liu Y. Up-embeddability of graphs with small order[J]. Applied Mathematics Letters, 2010, 23(3): 267-271.

[10] Lv S, Liu Y. Up-embeddability of graphs with new degree-sum[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series, 2017, 33(1): 169-174.