

# 形状可调 Bézier 曲线的构造方法

严兰兰<sup>1,2</sup>, 韩旭里<sup>2</sup>, 黄涛<sup>1\*</sup>

(1. 东华理工大学 理学院, 江西 南昌 330013; 2. 中南大学 数学与统计学院, 湖南 长沙 410083)

**摘要:**针对 Bézier 曲线相对于控制顶点形状固定的不足, 各种含参数的、性质类似于 Bernstein 基函数的调配函数纷纷被提出, 但这些调配函数是如何推导出来的却无从知晓. 本文借助经典 Bernstein 基函数的升阶公式, 基于由可调控制顶点定义可调曲线的思想来定义形状可调 Bézier 曲线, 详细展示了调配函数的构造过程, 现有文献中的很多调配函数都可用该方法得到. 按本文方法定义可调 Bézier 曲线, 其形状参数的几何意义直观明了. 本文不仅揭示了可调 Bézier 曲线形状可调的本质, 而且给出了构造含参数的多项式调配函数的通用方法.

**关键词:** 曲线表示方法; Bézier 曲线; 形状参数; 调配函数

**中图分类号:** G633.66      **文献标志码:** A      **文章编号:** 1672-9102(2018)02-0110-08

## The Construction Method of Shape Adjustable Bézier Curve

Yan Lanlan<sup>1,2</sup>, Han Xuli<sup>2</sup>, Huang Tao<sup>1</sup>

(1. College of Science, East China University of Technology, Nanchang 330013, China;

2. School of Mathematics and Statistics, Central South University, Changsha 410083, China)

**Abstract:** Aiming at the drawback that the shape of Bézier curve was fixed with respect to the control points, various blending functions with parameter and with similar properties to the Bernstein basis functions were presented. But there was no way to know how do these blending functions were derived. With the help of the degree elevation formula of the classical Bernstein basis function and based on the idea that the adjustable curve was defined by the adjustable control points, the shape adjustable Bézier curve is defined. The construction process of the blending function was demonstrated in detail. Many blending functions in the existing literatures can be obtained by this method. To define the adjustable Bézier curve according to the method given here, the geometric meaning of the shape parameter is straightforward. Not only the nature of shape adjustable of the Bézier curve is revealed, but also the general method of constructing polynomial blending functions with parameter is given.

**Keywords:** curve representation method; Bézier curve; shape parameter; blending function

Bézier 方法是计算机辅助几何设计中表示自由曲线曲面的重要方法之一, 在具备几何直观、计算简单、表现力强等诸多优点的同时, Bézier 方法也存在不足. 例如, Bézier 曲线相对于控制顶点形状固定<sup>[1]</sup>, 为弥补这一缺憾, 近十余年间学者们提出了很多带形状参数的拟 Bézier 曲线<sup>[2]</sup>. 经典 Bézier 曲线由控制顶点和 Bernstein 基函数做线性组合生成, 而拟 Bézier 曲线则由控制顶点和含参数的调配函数做线性组合生成<sup>[3]</sup>, 当参数值改变时, 真正参与计算的调配函数发生变化, 导致拟 Bézier 曲线的形状随之改变<sup>[4]</sup>. 从这个角度看, 拟 Bézier 曲线的形状之所以可以在不改变控制顶点的情况下自由调整, 根本原因在于所采用的调

收稿日期: 2015-04-23

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11261003; 11761008); 江西省自然科学基金资助项目(20161BAB211028); 江西省教育厅科技项目(GJJ160558)

\* 通信作者, 309537037@qq.com

配函数是“可调”的,是调配函数的改变决定了曲线形状的必然改变.因此,要想定义新的形状可调的拟 Bézier 曲线,主要任务是寻找新的含参数的调配函数.现有文献给出的含参数的调配函数从类型上看有多项式函数<sup>[5]</sup>、三角函数<sup>[6]</sup>和双曲函数<sup>[7]</sup>等,几乎所有以形状可调 Bézier 曲线为研究主题的文献都是直接给出含参数的调配函数,然后讨论其性质,再定义曲线,分析曲线性质,至于调配函数是如何推导出来的,没有文献作出介绍.

Bézier 方法从一开始就是面向几何而非面向代数,当采用控制顶点来定义曲线时,曲线形状与控制多边形的形状有直接联系,因此通过改变控制顶点来调整曲线形状的这种方式才最具几何直观性.相比较而言,拟 Bézier 曲线通过改变调配函数来调整曲线形状属于代数方法,曲线中形状参数的几何意义并不直观.为改变这种情况,同时也为了使调配函数的构造过程具体化,这里打算用新的方式来定义形状可调 Bézier 曲线.

注意到 Bézier 曲线具有升阶算法,低次 Bézier 曲线可用高次 Bézier 曲线表示,升阶以后,曲线控制顶点数量增加,灵活度增强,而曲线形状不变.但若改变升阶以后曲线的控制顶点,则曲线形状必然发生改变.本文正是从该思路出发定义形状可调 Bézier 曲线:先将 Bézier 曲线升阶,得出表示同一条曲线的高一次 Bézier 曲线的控制顶点,这些顶点除首末两个之外,其他都是原 Bézier 曲线两两相邻控制顶点的线性组合;然后改变线性组合系数,在系数中引入参数,由含参数的控制顶点和比原曲线高一次的 Bernstein 基函数定义新曲线,从而实现通过改变参数值来改变控制顶点进而从几何直观的角度调整曲线形状的目标.整理新曲线的表达式,可将其改写成原 Bézier 曲线的控制顶点和一组新的含参数的多项式函数的线性组合,所得多项式就是文献中定义形状可调 Bézier 曲线时致力寻找的调配函数.

## 1 符号说明

$n$  次 Bernstein 基函数  $B_{n,i}(t) = C_n^i t^i (1-t)^{n-i}$ , 其中  $i = 0, 1, \dots, n, t \in [0, 1]$ . Bernstein 基函数具有升阶公式:

$$B_{n,i}(t) = \left(1 - \frac{i}{n+1}\right) B_{n+1,i}(t) + \frac{i+1}{n+1} B_{n+1,i+1}(t), \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (1)$$

用  $\mathbf{Q}_i (i = 0, 1, \dots, n)$  表示  $n$  次 Bézier 曲线的控制顶点,用  $p_n(t)$  表示  $n$  次 Bézier 曲线,其中

$$p_n(t) = \sum_{i=0}^n B_{n,i}(t) \mathbf{Q}_i, \quad t \in [0, 1]. \quad (2)$$

用  $b_n(t)$  表示由控制顶点  $\mathbf{Q}_i (i = 0, 1, \dots, n)$  定义的形状可调 Bézier 曲线,用  $N_{n,i}(t) (i = 0, 1, \dots, n)$  表示可调 Bézier 曲线的含参数的调配函数.

## 2 可调曲线的构造

给定  $n+1$  个控制顶点  $\mathbf{Q}_i (i = 0, 1, \dots, n)$ , 将定义一条  $n$  次 Bézier 曲线  $p_n(t)$  (式(2)), 为了构造形状可调 Bézier 曲线, 现对曲线升阶, 将式(1)代入式(2)并整理, 得到:

$$p_n(t) = B_{n+1,0}(t) \mathbf{Q}_0 + \sum_{i=1}^n B_{n+1,i}(t) \left[ \left(1 - \frac{i}{n+1}\right) \mathbf{Q}_i + \frac{i}{n+1} \mathbf{Q}_{i-1} \right] + B_{n+1,n+1}(t) \mathbf{Q}_n.$$

当  $n$  为偶数时,

$$p_n(t) = B_{n+1,0}(t) \mathbf{Q}_0 + \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} B_{n+1,i}(t) \left( \frac{i}{n+1} \mathbf{Q}_{i-1} + \frac{n+1-i}{n+1} \mathbf{Q}_i \right) + \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} B_{n+1,n+1-i}(t) \left( \frac{n+1-i}{n+1} \mathbf{Q}_{n-i} + \frac{i}{n+1} \mathbf{Q}_{n+1-i} \right) + B_{n+1,n+1}(t) \mathbf{Q}_n. \quad (3)$$

当  $n$  为奇数时,

$$p_n(t) = B_{n+1,0}(t) \mathbf{Q}_0 + \sum_{i=1}^{\frac{(n-1)}{2}} B_{n+1,i}(t) \left( \frac{i}{n+1} \mathbf{Q}_{i-1} + \frac{n+1-i}{n+1} \mathbf{Q}_i \right) + B_{n+1,\frac{n+1}{2}}(t) \left( \frac{1}{2} \mathbf{Q}_{\frac{n-1}{2}} + \frac{1}{2} \mathbf{Q}_{\frac{n+1}{2}} \right) + \sum_{i=1}^{\frac{(n-1)}{2}} B_{n+1,n+1-i}(t) \left( \frac{n+1-i}{n+1} \mathbf{Q}_{n-i} + \frac{i}{n+1} \mathbf{Q}_{n+1-i} \right) + B_{n+1,n+1}(t) \mathbf{Q}_n. \quad (4)$$

现在通过改变式(3)和式(4)中控制顶点线性组合的系数来定义形状可调的 Bézier 曲线.当  $n$  为偶数

时,引入  $n$  个参数  $\lambda_i(i = 1, 2, \dots, n)$ , 其中

$$\begin{cases} i - (n + 1) \leq \lambda_i \leq i, i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}; \\ -i \leq \lambda_i \leq n + 1 - i, i = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2, \dots, n. \end{cases} \quad (5)$$

令

$$\begin{aligned} b_n(t) = & B_{n+1,0}(t)Q_0 + \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} B_{n+1,i}(t) \left( \frac{i - \lambda_i}{n + 1} Q_{i-1} + \frac{n + 1 - i + \lambda_i}{n + 1} Q_i \right) + \\ & \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} B_{n+1,n+1-i}(t) \left( \frac{n + 1 - i + \lambda_{n+1-i}}{n + 1} Q_{n-i} + \frac{i - \lambda_{n+1-i}}{n + 1} Q_{n+1-i} \right) + B_{n+1,n+1}(t)Q_n. \end{aligned} \quad (6)$$

当  $n$  为奇数且  $n \geq 3$  时,引入  $n - 1$  个参数  $\lambda_i(i = 1, 2, \dots, n - 1)$ , 其中

$$\begin{cases} i - (n + 1) \leq \lambda_i \leq i, i = 1, 2, \dots, \frac{n - 1}{2}; \\ -i - 1 \leq \lambda_i \leq n - i, i = \frac{n + 1}{2}, \frac{n + 3}{2}, \dots, n - 1. \end{cases} \quad (7)$$

令

$$\begin{aligned} b_n(t) = & B_{n+1,0}(t)Q_0 + \sum_{i=1}^{\frac{(n-1)}{2}} B_{n+1,i}(t) \left( \frac{i - \lambda_i}{n + 1} Q_{i-1} + \frac{n + 1 - i + \lambda_i}{n + 1} Q_i \right) + B_{n+1,\frac{n+1}{2}}(t) \left( \frac{1}{2} Q_{\frac{n-1}{2}} + \frac{1}{2} Q_{\frac{n+1}{2}} \right) + \\ & \sum_{i=1}^{\frac{(n-1)}{2}} B_{n+1,n+1-i}(t) \left( \frac{n + 1 - i + \lambda_{n-i}}{n + 1} Q_{n-i} + \frac{i - \lambda_{n-i}}{n + 1} Q_{n+1-i} \right) + B_{n+1,n+1}(t)Q_n. \end{aligned} \quad (8)$$

式(6)和式(8)即为由控制顶点  $Q_i(i = 0, 1, \dots, n)$  定义的形状可调 Bézier 曲线.

### 3 参数几何意义

由式(6)和式(8)可知:给定控制顶点  $Q_i(i = 0, 1, \dots, n)$  时,改变  $\lambda_i$  的值,可调 Bézier 曲线的形状会发生改变.为了明确数值的变化对曲线形状的影响,将式(6)和式(8)记作:

$$b_n(t) = \sum_{i=0}^{n+1} B_{n+1,i}(t) V_i.$$

也就是将由  $n + 1$  个控制顶点定义的形状可调 Bézier 曲线视为  $n + 1$  次的 Bézier 曲线,由式(6)和式(8)可以推出:控制顶点  $V_i(i = 0, 1, \dots, n + 1)$  与  $Q_i(i = 0, 1, \dots, n)$  的关系为

当  $n$  为偶数时,

$$\begin{cases} V_0 = Q_0; \\ V_i = \frac{i - \lambda_i}{n + 1} Q_{i-1} + \frac{n + 1 - i + \lambda_i}{n + 1} Q_i, i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}; \\ V_i = \frac{i + \lambda_i}{n + 1} Q_{i-1} + \frac{n + 1 - i - \lambda_i}{n + 1} Q_i, i = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2, \dots, n; \\ V_{n+1} = Q_n. \end{cases} \quad (9)$$

当  $n$  为奇数且  $n \geq 3$  时,

$$\begin{cases} V_0 = Q_0; \\ V_i = \frac{i - \lambda_i}{n + 1} Q_{i-1} + \frac{n + 1 - i + \lambda_i}{n + 1} Q_i, i = 1, 2, \dots, \frac{n - 1}{2}; \\ V_{\frac{n+1}{2}} = \frac{1}{2} Q_{\frac{n-1}{2}} + \frac{1}{2} Q_{\frac{n+1}{2}}; \\ V_i = \frac{i + \lambda_{i-1}}{n + 1} Q_{i-1} + \frac{n + 1 - i - \lambda_{i-1}}{n + 1} Q_i, i = \frac{n + 3}{2}, \frac{n + 5}{2}, \dots, n; \\ V_{n+1} = Q_n. \end{cases} \quad (10)$$

由式(9)和式(10)可知: $n + 1$ 次 Bézier 曲线的首末控制点  $V_0$  和  $V_{n+1}$  分别与给定的首末控制点  $Q_0$  和  $Q_n$  一致,其他控制点  $V_i(i = 1, 2, \dots, n)$  分别位于给定控制多边形的边  $Q_{i-1}Q_i(i = 1, 2, \dots, n)$  上.当  $n$  为偶数时,点  $V_i(i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2})$  分边  $Q_{i-1}Q_i(i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2})$  的比例为  $n + 1 - i + \lambda_i : i - \lambda_i$ , 若增加  $\lambda_i(i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2})$ , 则点  $V_i(i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2})$  更接近点  $Q_i(i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2})$ ; 点  $V_i(i = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2, \dots, n)$  分边  $Q_{i-1}Q_i(i = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2, \dots, n)$  的比例为  $n + 1 - i - \lambda_i : i + \lambda_i$ , 若增加  $\lambda_i(i = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2, \dots, n)$ , 则点  $V_i(i = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2, \dots, n)$  更接近点  $Q_{i-1}(i = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2, \dots, n)$ . 当  $n$  为奇数时,点  $V_i(i = 1, 2, \dots, n)$  与边  $Q_{i-1}Q_i(i = 1, 2, \dots, n)$  的关系也有类似结论.

由以上分析可知: $n + 1$ 次 Bézier 曲线的控制多边形  $V_0V_1 \dots V_{n+1}$  可视为割去原给定控制多边形  $Q_0Q_1 \dots Q_n$  的  $n - 1$  个角后所得,当  $\lambda_i(i = 1, 2, \dots, n)$  中的一个或多个同时增加时,被割去的角相应减小,当所有参数均取给定范围(见式(5)和式(7))的最大值时,控制多边形  $V_0V_1 \dots V_{n+1}$  与  $Q_0Q_1 \dots Q_n$  重合.也就是说,随着  $\lambda_i(i = 1, 2, \dots, n)$  的增加, $n + 1$ 次 Bézier 曲线的控制多边形会逐渐接近给定的控制多边形.因此由 Bézier 曲线的逼近性可知,同时增加  $\lambda_i(i = 1, 2, \dots, n)$  的值,会将可调 Bézier 曲线逐渐拉向给定的控制多边形  $Q_0Q_1 \dots Q_n$ . 若只增加一个参数,而其他参数固定不变,则会可调 Bézier 曲线逐渐拉向某一条控制边.

图 1~图 3 显示了由 4 个控制顶点定义的可调 Bézier 曲线的形状随参数的改变产生的变化.图中圆圈为给定的控制顶点  $Q_i(i = 0, 1, 2, 3)$ , 实心点为用 4 次 Bézier 曲线表示可调 Bézier 曲线时的控制顶点  $V_i(i = 0, 1, 2, 3, 4)$ . 无论参数怎样改变,点  $V_i(i = 0, 2, 4)$  位置始终不变.

图 1 中曲线从上至下依次取  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.5, -0.5, -1.5, -2.5$ , 因 2 个参数同时改变,所以点  $V_1$  和点  $V_3$  都随之改变.由图可见:随着  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  的同时增加,曲线逐渐整体逼近控制多边形.

图 2 中曲线固定取  $\lambda_2 = -2$ , 从上至下依次取  $\lambda_1 = 0.5, -0.5, -1.5, -2.5$ , 因  $\lambda_2$  固定所以点  $V_3$  固定,而点  $V_1$  则随着  $\lambda_1$  的改变而变动.由图可见:随着  $\lambda_1$  的增加,曲线逐渐逼近控制边  $Q_1V_2$ .

图 3 中曲线固定取  $\lambda_1 = -1$ , 从上至下依次取  $\lambda_2 = 0.5, -0.5, -1.5, -2.5$ , 因  $\lambda_1$  固定所以点  $V_1$  固定,而点  $V_3$  则随着  $\lambda_2$  的改变而变动.由图可见:随着  $\lambda_2$  的增加,曲线逐渐逼近控制边  $V_2Q_2$ .

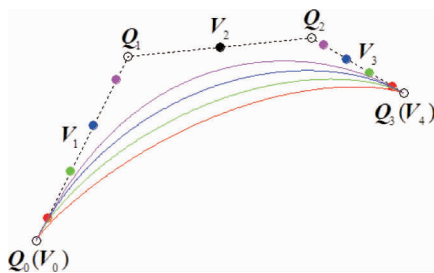


图 1 同时改变  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  时曲线的变化趋势

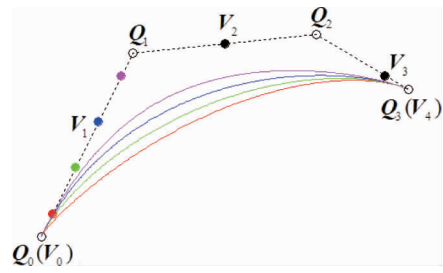


图 2 固定  $\lambda_2$  改变  $\lambda_1$  时曲线的变化趋势

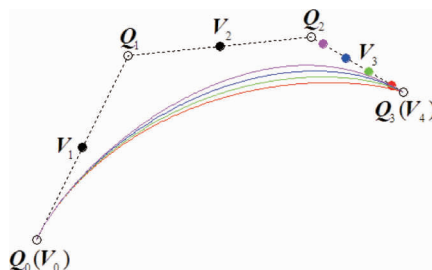


图 3 固定  $\lambda_1$  改变  $\lambda_2$  时曲线的变化趋势

图 4~图 8 显示了由 5 个控制顶点定义的可调 Bézier 曲线的形状随参数的改变产生的变化.图中圆圈为给定的控制顶点  $Q_i(i = 0, 1, 2, 3, 4)$ , 实心点为用 5 次 Bézier 曲线表示可调 Bézier 曲线时的控制顶点

$V_i(i = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$ , 无论参数怎样改变, 点  $V_i(i = 0, 5)$  位置始终不变.

图 4 中曲线从上至下分别取  $\lambda_1 = \lambda_4 = -3, \lambda_2 = \lambda_3 = -2.5, \lambda_1 = \lambda_4 = -2, \lambda_2 = \lambda_3 = -1, \lambda_1 = \lambda_4 = -0.5, \lambda_2 = \lambda_3 = 0.5, \lambda_1 = \lambda_4 = 0.5, \lambda_2 = \lambda_3 = 1.5$ , 因参数同时改变, 点  $V_i(i = 1, 2, 3, 4)$  都随之改变. 由图可见: 随着  $\lambda_i(i = 1, 2, 3, 4)$  的增加, 曲线逐渐整体逼近控制多边形.

图 5 中曲线固定取  $\lambda_2 = \lambda_3 = 0, \lambda_4 = -2$ , 从上至下依次取  $\lambda_1 = 0.5, -1, -2, -3$ , 因  $\lambda_i(i = 2, 3, 4)$  固定所以点  $V_i(i = 2, 3, 4)$  固定, 而点  $V_1$  则随着  $\lambda_1$  的改变而变动. 由图可见: 随着  $\lambda_1$  的增加, 曲线逐渐逼近控制边  $Q_1V_2$ .

图 6 中曲线固定取  $\lambda_1 = -1, \lambda_3 = 0, \lambda_4 = -2$ , 从交点右侧看从上至下曲线依次取  $\lambda_2 = 1, 0, -1, -2$ , 因  $\lambda_i(i = 1, 3, 4)$  固定所以点  $V_i(i = 1, 3, 4)$  固定, 而点  $V_2$  则随着  $\lambda_2$  的改变而变动. 由图可见: 随着  $\lambda_2$  的增加, 曲线逐渐逼近控制边  $Q_2V_3$ .

图 7 中的曲线固定取  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_4 = -1$ , 从交点左侧看从上至下曲线依次取  $\lambda_3 = 1.5, 0.5, -1, -2.5$ , 因  $\lambda_i(i = 1, 2, 4)$  固定所以点  $V_i(i = 1, 2, 4)$  固定, 而点  $V_3$  则随着  $\lambda_3$  的改变而变动. 由图可见: 随着  $\lambda_3$  的增加, 曲线逐渐逼近控制边  $V_2Q_2$ .

图 8 中的曲线固定取  $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 0$ , 从上至下依次取  $\lambda_4 = 0.5, -1.5, -2.5, -3.5$ , 因  $\lambda_i(i = 1, 2, 3)$  固定所以点  $V_i(i = 1, 2, 3)$  固定, 而点  $V_4$  则随着  $\lambda_4$  的改变而变动. 由图可见: 随着  $\lambda_4$  的增加, 曲线逐渐逼近控制边  $V_3Q_3$ .

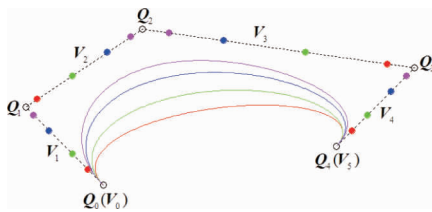


图 4 同时改变  $\lambda_i(i = 1, 2, 3, 4)$  时曲线的变化趋势

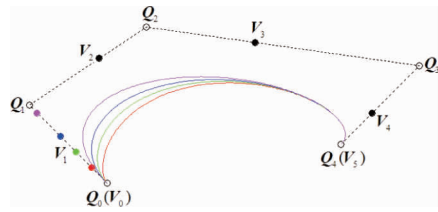


图 5 固定  $\lambda_i(i = 2, 3, 4)$  改变  $\lambda_1$  时曲线的变化趋势

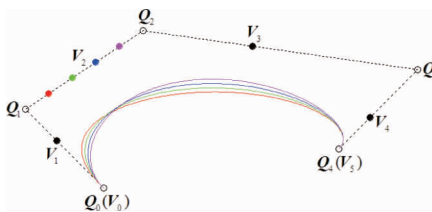


图 6 固定  $\lambda_i(i = 1, 3, 4)$  改变  $\lambda_2$  时曲线的变化趋势

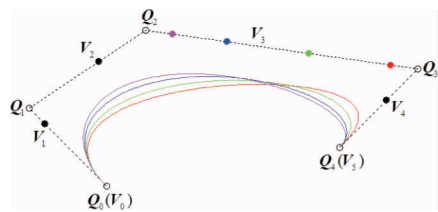


图 7 固定  $\lambda_i(i = 1, 2, 4)$  改变  $\lambda_3$  时曲线的变化趋势

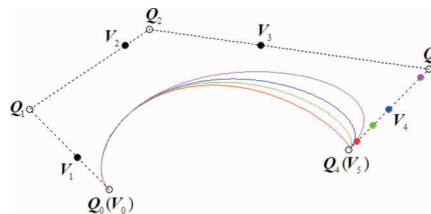


图 8 固定  $\lambda_i(i = 1, 2, 3)$  改变  $\lambda_4$  时曲线的变化趋势

### 4 调配函数

式(6)和式(8)所给可调 Bézier 曲线是用固定的 Bernstein 基函数和含参数的控制顶点的线性组合来表示的, 为了按照已有文献中的方式将可调 Bézier 曲线表示成固定的控制顶点和含参数的调配函数的线性组合, 需将式(6)和式(8)进行改写.

当  $n$  为偶数时, 将式(6)整理为

$$b_n(t) = [B_{n+1,0}(t) + \frac{1 - \lambda_1}{n + 1}B_{n+1,1}(t)]Q_0 + \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} [\frac{i + 1 - \lambda_{i+1}}{n + 1}B_{n+1,i+1}(t) + \frac{n + 1 - i + \lambda_i}{n + 1}B_{n+1,i}(t)]Q_i +$$

$$\left[ \frac{\frac{n}{2} + 1 + \lambda_{\frac{n}{2}}}{n+1} B_{n+1, \frac{n}{2}}(t) + \frac{\frac{n}{2} + 1 + \lambda_{\frac{n}{2+1}}}{n+1} B_{n+1, \frac{n}{2+1}}(t) \right] \mathcal{Q}_{\frac{n}{2}} + \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^{n-1} \left[ \frac{i+1 + \lambda_{i+1}}{n+1} B_{n+1, i+1}(t) + \frac{n+1-i - \lambda_i}{n+1} B_{n+1, i}(t) \right] \mathcal{Q}_i + \left[ \frac{1 - \lambda_n}{n+1} B_{n+1, n}(t) + B_{n+1, n+1}(t) \right] \mathcal{Q}_n. \quad (11)$$

当  $n$  为奇数时, 将式(8)整理为

$$b_n(t) = \left[ B_{n+1, 0}(t) + \frac{1 - \lambda_1}{n+1} B_{n+1, 1}(t) \right] \mathcal{Q}_0 + \sum_{i=1}^{\frac{(n-3)}{2}} \left[ \frac{i+1 - \lambda_{i+1}}{n+1} B_{n+1, i+1}(t) + \frac{n+1-i + \lambda_i}{n+1} B_{n+1, i}(t) \right] \mathcal{Q}_i + \left[ \frac{\frac{(n+3)}{2} + \lambda_{\frac{(n-1)}{2}}}{n+1} B_{n+1, \frac{n-1}{2}}(t) + \frac{1}{2} B_{n+1, \frac{n+1}{2}}(t) \right] \mathcal{Q}_{\frac{n-1}{2}} + \left[ \frac{1}{2} B_{n+1, \frac{n+1}{2}}(t) + \frac{\frac{(n+3)}{2} + \lambda_{\frac{(n+1)}{2}}}{n+1} B_{n+1, \frac{n+3}{2}}(t) \right] \mathcal{Q}_{\frac{n+1}{2}} + \sum_{i=\frac{(n+3)}{2}}^{n-1} \left[ \frac{i+1 + \lambda_i}{n+1} B_{n+1, i+1}(t) + \frac{n+1-i - \lambda_{i-1}}{n+1} B_{n+1, i}(t) \right] \mathcal{Q}_i + \left[ \frac{1 - \lambda_{n-1}}{n+1} B_{n+1, n}(t) + B_{n+1, n+1}(t) \right] \mathcal{Q}_n. \quad (12)$$

将式(11)和式(12)记作

$$b_n(t) = \sum_{i=0}^n N_{n,i}(t) \mathcal{Q}_i.$$

式中:  $N_{n,i}(t)$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) 为可调 Bézier 曲线的含参数的调配函数.

当  $n$  为偶数时,

$$\left\{ \begin{array}{l} N_{n,0}(t) = B_{n+1,0}(t) + \frac{1 - \lambda_1}{n+1} B_{n+1,1}(t); \\ N_{n,i}(t) = \frac{n+1-i + \lambda_i}{n+1} B_{n+1,i}(t) + \frac{i+1 - \lambda_{i+1}}{n+1} B_{n+1,i+1}(t), i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1; \\ N_{n, \frac{n}{2}}(t) = \frac{\frac{n}{2} + 1 + \lambda_{\frac{n}{2}}}{n+1} B_{n+1, \frac{n}{2}}(t) + \frac{\frac{n}{2} + 1 + \lambda_{\frac{n}{2+1}}}{n+1} B_{n+1, \frac{n}{2+1}}(t); \\ N_{n,i}(t) = \frac{n+1-i - \lambda_i}{n+1} B_{n+1,i}(t) + \frac{i+1 + \lambda_{i+1}}{n+1} B_{n+1,i+1}(t), i = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2, \dots, n-1; \\ N_{n,n}(t) = \frac{1 - \lambda_n}{n+1} B_{n+1,n}(t) + B_{n+1,n+1}(t). \end{array} \right. \quad (13)$$

当  $n$  为奇数且  $n \geq 3$  时,

$$\left\{ \begin{array}{l} N_{n,0}(t) = B_{n+1,0}(t) + \frac{1 - \lambda_1}{n+1} B_{n+1,1}(t); \\ N_{n,i}(t) = \frac{n+1-i + \lambda_i}{n+1} B_{n+1,i}(t) + \frac{i+1 - \lambda_{i+1}}{n+1} B_{n+1,i+1}(t), i = 1, 2, \dots, \frac{n-3}{2}; \\ N_{n, \frac{n-1}{2}}(t) = \frac{\frac{(n+3)}{2} + \lambda_{\frac{(n-1)}{2}}}{n+1} B_{n+1, \frac{n-1}{2}}(t) + \frac{1}{2} B_{n+1, \frac{n+1}{2}}(t); \\ N_{n, \frac{n+1}{2}}(t) = \frac{1}{2} B_{n+1, \frac{n+1}{2}}(t) + \frac{\frac{(n+3)}{2} + \lambda_{\frac{(n+1)}{2}}}{n+1} B_{n+1, \frac{n+3}{2}}(t); \\ N_{n,i}(t) = \frac{n+1-i - \lambda_{i-1}}{n+1} B_{n+1,i}(t) + \frac{i+1 + \lambda_i}{n+1} B_{n+1,i+1}(t), i = \frac{n+3}{2}, \frac{n+5}{2}, \dots, n-1; \\ N_{n,n}(t) = \frac{1 - \lambda_{n-1}}{n+1} B_{n+1,n}(t) + B_{n+1,n+1}(t). \end{array} \right. \quad (14)$$

## 5 性质分析

由式(13)和式(14)以及 Bernstein 基函数的性质,得调配函数  $N_{n,i}(t)$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) 性质如下:

1) 非负性:当调配函数中的参数满足式(5)和式(7)中的条件时,对  $t \in [0, 1]$ , 有  $N_{n,i}(t) \geq 0$ , 其中  $i = 0, 1, \dots, n$ .

2) 规范性:  $\sum_{i=0}^n N_{n,i}(t) = 1$ .

3) 对称性:当  $n$  为偶数时,若  $\lambda_i = \lambda_{n+1-i}$  ( $i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}$ ), 则  $N_{n,i}(t) = N_{n,n-i}(1-t)$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ); 当  $n$  为奇数时,若  $\lambda_i = \lambda_{n-i}$  ( $i = 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2}$ ), 则  $N_{n,i}(t) = N_{n,n-i}(1-t)$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ).

4) 端点性质:对  $i = 0, 1, \dots, n$ , 有  $N_{n,0}(0) = 1; N_{n,i}(0) = 0, i \neq 0; N_{n,i}(1) = 0, i \neq n; N_{n,n}(1) = 1; N'_{n,0}(0) = -(n + \lambda_1); N'_{n,0}(0) = -(n + \lambda_1); N'_{n,1}(0) = n + \lambda_1; N'_{n,i}(0) = 0, i \neq 0, 1$ .

当  $n$  为偶数时,

$$\begin{cases} N'_{n,n-1}(1) = -(n + \lambda_n); \\ N'_{n,n}(1) = n + \lambda_n; \\ N'_{n,i}(0) = 0, i \neq n-1, n. \end{cases}$$

当  $n$  为奇数时,

$$\begin{cases} N'_{n,n-1}(1) = -(n + \lambda_{n-1}); \\ N'_{n,n}(1) = n + \lambda_{n-1}; \\ N'_{n,i}(0) = 0, i \neq n-1, n. \end{cases}$$

5) 退化性:若所有参数都为零,调配函数即  $n$  ( $n \geq 2$ ) 次 Bernstein 基函数.文献中很多调配函数可由该调配函数得到.如当  $n = 2$  时,令  $\lambda_1 = \lambda_2$ , 得文献[8]中调配函数;令  $\lambda_1 = \alpha, \lambda_2 = \beta$ , 得文献[9]中初始调配函数;令  $\lambda_1 = \lambda - 2, \lambda_2 = \mu - 2$ , 得文献[10]中调配函数;当  $n = 3$  时,令  $\lambda_1 = \lambda_2$ , 得文献[11]中调配函数;令  $\lambda_1 = \lambda, \lambda_2 = \mu$ , 得文献[12-14]中调配函数;当  $n = 4$  时,令  $\lambda_1 = \lambda, \lambda_2 = \frac{\lambda}{2}, \lambda_3 = \frac{\lambda}{2}, \lambda_4 = \lambda$ , 得文献[15]中第一类调配函数;令  $\lambda_1 = \lambda, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -\frac{\beta}{2}, \lambda_4 = \alpha$ , 得文献[16]中调配函数;令  $\lambda_1 = a, \lambda_2 = \frac{b}{2}, \lambda_3 = \frac{c}{2}, \lambda_4 = d$ , 得文献[17]中第二类调配函数;当  $n = 5$  时,令  $\lambda_1 = \lambda, \lambda_2 = -\frac{2}{5}\lambda, \lambda_3 = -\frac{2}{5}\lambda, \lambda_4 = \lambda$ , 得文献[18]中调配函数;令  $\lambda_1 = \alpha, \lambda_2 = \frac{4}{5}\alpha - \frac{2}{5}\beta, \lambda_3 = \frac{4}{5}\alpha - \frac{2}{5}\beta, \lambda_4 = \alpha$ , 得文献[19]中调配函数;当  $n = 6$  时,令  $\lambda_1 = x, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -\frac{1}{5}xy, \lambda_4 = -\frac{1}{5}xy, \lambda_5 = 0, \lambda_6 = x$ , 得文献[20]中调配函数.

由调配函数的性质,易知可调 Bézier 曲线具有下列性质:

1) 凸包性:可调 Bézier 曲线位于控制顶点  $Q_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) 的凸包内.

2) 几何不变性与仿射不变性:可调 Bézier 曲线的形状与坐标系的选取无关;欲获得经仿射变换后的可调 Bézier 曲线,只需对控制多边形进行相同的变换.

3) 对称性: $n$  为偶数且  $\lambda_i = \lambda_{n+1-i}$  ( $i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}$ ), 或  $n$  为奇数且  $\lambda_i = \lambda_{n-i}$  ( $i = 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2}$ ) 时,由顶点  $Q_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) 和  $Q_{n-i}$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) 定义的可调 Bézier 曲线形状相同,只是方向相反.

4) 端点插值与端边相切性:可调 Bézier 曲线以控制多边形的首末顶点为起止点,且曲线在起止点处与控制多边形的首末边相切.

## 6 结论

1) 本文对 Bézier 曲线升阶一次,通过改变控制顶点的线性组合系数来融入参数,该方法具有一般性,

也可以不对 Bézier 曲线升阶,或者对 Bézier 曲线进行两次或多次升阶,再按类似方式在控制顶点中融入形状参数,从而得到不同次数的调配函数.

2) 下一步的研究可以将本文方法推广用于构造形状可调的三角域 Bézier 曲面.

#### 参考文献:

- [1] Wang W T, Wang G Z. Bézier curves with shape parameter [J]. Journal of Zhejiang University Science A, 2005, 6(6): 497-501.
- [2] Zeng X M, Yang L Qiang. Bézier curves and surface with shape parameter [J]. International Journal of Computer Mathematics, 2009, 86(7): 1253-1263.
- [3] Han X A, Ma Y C, Huang X L. A novel generalization of Bézier curve and surface [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2008, 217(1): 180-193.
- [4] Yan L L, Liang J F. An extension of the Bézier model [J]. Applied Mathematic and Computation, 2011, 218(6): 2863-2879.
- [5] Chen J, Wang G J. A new type of the generalized Bezier curves [J]. Applied Mathematics-A Journal of Chinese Universities, 2011, 26(1): 47-56.
- [6] Chen Q Y, Wang G Z. A class of Bézier-like curves [J]. Computer Aided Geometric Design, 2003, 20(1): 29-39.
- [7] 张锦秀,檀结庆.代数双曲 Bézier 曲线的扩展[J].工程图学学报,2011,32(1):31-38.
- [8] 韩旭里,刘圣军.二次 Bézier 曲线的扩展[J].中南工业大学学报(自然科学版),2003,34(2):214-217.
- [9] 严兰兰,宋来忠.带两形状参数的 Bézier 曲线[J].工程图学学报,2008,29(3):88-92.
- [10] 李军成.一类可调控的三次多项式曲线[J].计算机工程与科学,2010,32(4):52-55.
- [11] 吴晓勤,韩旭里.三次 Bézier 曲线的扩展[J].工程图学学报,2005,26(6):98-102.
- [12] 谢进,洪素珍.一类带两个形状参数的三次 Bézier 曲线[J].计算机工程与设计,2007,28(6):1361-1363.
- [13] 韩西安,马逸尘.拟三次 Bézier 曲线[J].装备指挥技术学院学报,2008,19(1):99-102.
- [14] 杭后俊,余静,李汪根.三次 Bézier 曲线的一种双参数扩展及其应用[J].计算机工程与应用,2010,46(31):178-181.
- [15] 吴晓勤,韩旭里,罗善明.四次 Bézier 曲线的两种不同扩展[J].工程图学学报,2006,27(5):59-64.
- [16] 仇茹,杭后俊,潘俊超.带三参数的类四次 Bézier 曲线及其应用研究[J].计算机工程与应用,2014,50(20):158-162.
- [17] 张念娟,秦新强,胡刚,等.带多形状参数的四次 Bézier 曲线的新扩展[J].武汉理工大学学报,2009,31(20):156-160.
- [18] 姜岳道,植物. Bézier 曲线的扩展种类[J].内蒙古民族大学学报(自然科学版),2011,26(4):378-381.
- [19] 翟芳芳.带两个形状参数的五次 Bézier 曲线的扩展[J].大学数学,2012,28(3):59-63.
- [20] 植物,姜岳道,白根柱.六次 Bézier 曲线的新扩展[J].内蒙古民族大学学报(自然科学版),2012,27(2):140-141.