

带两个形状参数有理二次三角 Bézier 曲线

陈玲芳, 吴晓勤*, 陈余喜

(湖南科技大学 数学与计算科学学院, 湖南 湘潭 411201)

摘要: 本文提出了带两个形状参数的有理二次三角 Bézier 曲线, 由 4 个控制顶点生成的曲线具有传统有理三次 Bézier 曲线的几何特性, 包括端点性质、对称性、凸包性、几何和仿射不变性、变差缩减性. 分析了在权因子固定情形下, 通过改变形状参数值可以局部调控曲线形状; 也得出当形状参数值都为 -1 时, 曲线可退化为直线段. 曲线在适当的控制顶点下, 可精确表示椭圆弧和圆弧, 从而可方便整圆的表示. 在控制顶点和权因子相同的条件下, 当形状参数取值在一定范围内, 曲线具有比有理三次 Bézier 曲线对控制多边形更好的逼近.

关键词: 二次三角多项式基函数; 有理二次三角 Bézier 曲线; 形状参数

中图分类号: O241; TP391 **文献标志码:** A **文章编号:** 1672-9102(2018)02-0118-07

Rational Quadratic Triangular Bézier Curves with Two Shape Parameters

Chen Lingfang, Wu Xiaoqin, Chen Shexi

(School of Mathematics & Computation Science, Hunan University of Science & Technology, Xiangtan 411201, China)

Abstract: A rational quadratic trigonometric Bézier curve with two shape parameters was presented in this paper, The curves generated by four control points had the geometric characteristics of the traditional rational cubic Bézier curve, including the properties of the endpoint interpolation, symmetry, convex hull property, geometric & affine invariance, and variation diminishing property. It was analyzed that when the weight factors was fixed, the shape of the curve was controlled locally by changing the shape parameter value, also was concluded that when the shape parameter values were -1, the curve was degenerated into a straight line segment. The elliptical arcs and arcs at the appropriate control points were accurately represented by the curve, so that the whole circles was expressed conveniently. Under the same control vertex and the weight factor, the curve had a better approximation to the control polygon than the rational cubic Bézier curve when the shape parameter was taken in a certain range.

Keywords: quadratic trigonometric polynomials basis function; rational quadratic trigonometric Bézier curve; shape parameters

长期以来, 曲线曲面是计算机辅助几何设计(CAGD)研究的重要课题^[1-2], 在实际工程设计中, CAGD 满足自由曲线曲面形式的计算表示, 而自由曲线曲面一般是由基函数和控制顶点线性表示. 随着曲线曲面的发展, 现较成熟的是非均匀有理 B 样条(NURBS)方法, 曲线在 CAD 中有着广泛应用, 然而, NURBS 方法中各控制顶点的权因子对曲线的影响不易控制^[3], 而且多项式特性的曲线不能表示摆线、螺旋线等机械设计中需要的曲线. 为了克服这个困难, 近年来, 我们用带形状参数的三角多项式函数代替多项式, 这种

收稿日期: 2016-10-08

基金项目: 湖南省自然科学基金资助项目(2016JJ2015)

* 通信作者, E-mail: 389068015@qq.com

形状参数在交互式形状设计中起到关键作用,且在 CAGD 中多项式方法逐渐被有理形式取代,而非有理曲线是有理曲线的特例,有理形式的主要优势是可以精确表示圆锥曲线和非有理曲线.

在 CAD/CAM 体系中,有理二次 Bézier 曲线不仅表示圆弧和椭圆弧,而且应用于字形设计中^[4].考虑到三角多项式样条函数的可能性应用,Han^[5]提出了一类带形状参数的二次三角多项式曲线,曲线比一般的二次 B 样条曲线有更好的形状控制和逼近控制多边形;Xi-An Han^[6]等研究了带两个形状参数的三次三角 Bézier 曲线,曲线比三次 Bézier 曲线更接近控制多边形;Wu.X^[7]等描述了一个类似于三次 B 样条曲线的带参的二次三角样条曲线,曲线对不同的形状参数值有不同的参数连续性;Han^[8-9]后来又提出了 C^2 连续的分段二次三角多项式曲线和带整体形状参数的三次三角多项式曲线;Uzma^[10]等提出了单形状参数的二次三角 Bézier 曲线,曲线比二次三角 Bézier 曲线有更好的逼近性;进一步地,Uzma^[11-13]等研究了带两个形状参数的有理二次三角 Bézier 曲线和有理三次三角 Bézier 曲线,曲线形状由不同的参数和权因子控制,对控制多边形的逼近和曲线连续性有着重要的现实意义.

本文研究了新的具有 Bézier 曲线特性的带有两个形状参数的有理二次三角 Bézier 曲线,基函数是由 4 个二次三角多项式组成,由 4 个顶点控制的曲线完全具有三次 Bézier 曲线特性.在未改变控制顶点的情况下,形状参数和权因子可以灵活控制曲线形状,曲线在确定的形状参数和权因子控制点的特殊坐标下可表示成椭圆弧和圆弧,对于特殊的形状参数值,也可以很好的逼近有理三次 Bézier 曲线.

1 二次三角基函数

参考文献[14],进一步,我们定义带两个形状参数的二次三角多项式基函数,并讨论其性质.

定义 1 对于 $u \in [0,1]$,称

$$\begin{cases} f_0(u) = (1 - \sin \frac{\pi}{2}u)(1 - m \sin \frac{\pi}{2}u); \\ f_1(u) = (1 + m) \sin \frac{\pi}{2}u(1 - \sin \frac{\pi}{2}u); \\ f_2(u) = (1 + n) \cos \frac{\pi}{2}u(1 - \cos \frac{\pi}{2}u); \\ f_3(u) = (1 - \cos \frac{\pi}{2}u)(1 - n \cos \frac{\pi}{2}u). \end{cases} \quad (1)$$

式中: m, n 为参数,且 $m, n \in [-1,1]$,式(1)为带参的二次三角多项式基函数,从式(1)可得到基函数具有以下性质:

(1)非负性: $f_i(u) \geq 0, i = 0,1,2,3$.

(2)规范性: $\sum_{i=0}^3 f_i(u) = 1, u \in [0,1]$.

(3)参数单调性:即固定参数 $u, f_0(u)$ 和 $f_3(u)$ 分别是 m, n 的递减函数,而 $f_1(u), f_2(u)$ 分别是 m, n 的递增函数.

(4)对称性: $f_i(u; m, n) = f_{3-i}(1-u; n, m), i = 0,1,2,3$.

证明:

(1)和(2)显然由定义可证明.

(3)对于 $u \in [0,1], f_0(u), f_3(u)$ 分别对 m, n 求导,可知 $f_0(u), f_3(u)$ 在定义区间上是单调递减的,同理可知, $f_1(u), f_2(u)$ 在定义区间上是单调递增的.

(4)当 $i = 3$ 时,

$$f_3(u; m, n) = (1 - \cos \frac{\pi}{2}u)(1 - n \cos \frac{\pi}{2}u) = (1 - \sin \frac{\pi}{2}(1-u))(1 - m \sin \frac{\pi}{2}(1-u)) = f_0(1-u; n, m). \quad (2)$$

同理,对于其他3个基函数的对称性同样可证.

图1展示了 $m = n = 1$ 时的二次三角多项式基函数图形.

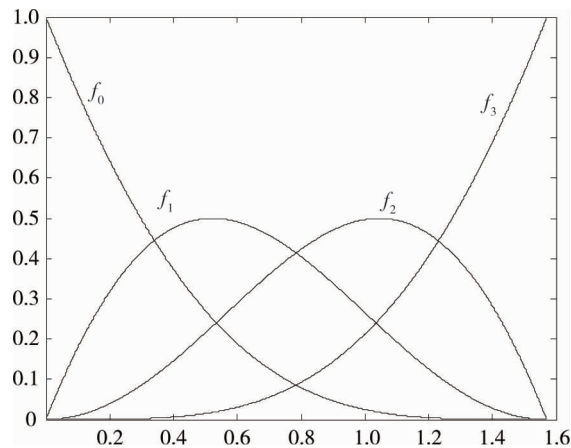


图1 二次三角多项式基函数($m=n=1$)

2 有理二次三角 Bézier 曲线

由上一节基函数的定义,我们给出带两个形状参数的有理二次三角 Bézier 曲线,简称 RQT-Bézier 曲线.

定义2 给定4个控制顶点 $P_i \in \mathbf{R}^2 (i = 0, 1, 2, 3)$,带两个形状参数的有理二次三角 Bézier 曲线定义为

$$f(u) = \frac{f_0 P_0 + f_1 P_1 \omega_1 + f_2 P_2 \omega_2 + f_3 P_3}{f_0 + f_1 \omega_1 + f_2 \omega_2 + f_3}, \quad (u \in [0, 1]). \quad (3)$$

式中: $f_i(u) (i = 0, 1, 2, 3)$ 是定义在式(1)中的基函数; ω_i 是权因子.

假设 $\omega_i \geq 0$ 且当 $\omega_i = 1$ 时,式(3)中分母等于1,我们将得到二次三角 Bézier 曲线.从式(3)可得 RQT-Bézier 曲线有下面的性质:

1) 端点性质

$$\begin{cases} f(0) = P_0, f(1) = P_3; \\ f'(0) = \frac{\pi}{2}(1+m)(P_1 - P_0)\omega_1; \\ f'(1) = \frac{\pi}{2}(1+n)(P_3 - P_2)\omega_2. \end{cases} \quad (4)$$

2) 对称性

如果曲线控制顶点 P_0, P_1, P_2, P_3 , 将其反序排列为 P_3, P_2, P_1, P_0 , 并且交换形状参数 m 和 n , 这样我们得到的曲线符合原曲线,只是方向不同而已.

$$f(u; m, n, P_0, P_1, P_2, P_3) = f(1-u; n, m, P_3, P_2, P_1, P_0), \quad (u \in [0, 1], m, n \in [-1, 1]). \quad (5)$$

3) 几何不变性和仿射不变性

曲线式(3)的形状不依赖于坐标系的选择,也就是,它满足下列2个等式:

$$f(u; m, n, P_0 + q, P_1 + q, P_2 + q, P_3 + q) = f(u; m, n, P_0, P_1, P_2, P_3) + q; \quad (6)$$

$$f(u; m, n, P_0 T, P_1 T, P_2 T, P_3 T) = f(u; m, n, P_0, P_1, P_2, P_3) T. \quad (7)$$

式中: $u \in [0, 1]; m, n \in [-1, 1]; q$ 为 \mathbf{R}^2 中任意矢量; T 是任意 2×2 矩阵.

对控制多边形进行平移、缩放或剪切等仿射变换后,对应的 RQT-Bézier 曲线就是仿射变换后的曲线.

4) 凸包性质

整个 RQT-Bézier 曲线恒位于它的控制点的凸包内.

5) 变差缩减性(V.D.)

平面上的任一条直线与曲线的交点数不会超过它与控制多边形交点数.

3 RQT-Bézier 曲线的形状控制

给定控制点 $P_i(i=0,1,2,3)$, 将权因子 ω_i 固定, 参数 m, n 将影响曲线式(3)的形状, 我们固定参数值 n , 参数 m 值逐渐增大时, 影响到是基函数只能是 $f_0(u)$ 和 $f_1(u)$, 由基函数参数单调性, $f_0(u)$ 是 m 的减函数, $f_1(u)$ 是 m 的增函数, 故曲线更靠近 P_0P_1 , 同理, 固定参数值 m , 参数 n 值且逐渐增大时, 曲线更靠近 P_2P_3 , 于是, 当同时增加 m, n 值时, 整个曲线则更加靠近控制多边形.

形状参数对 RQT-Bézier 曲线形状的影响如图 2 所示. 图 2a 中, 固定 ω_i 值, 且 $\omega_1 = \omega_2 = 2$ 时, 当参数 $m = 1, n$ 分别取 $m = 1, 0.5, 0, -0.5, -1$ 时, 曲线(实线)向右靠近, 同样的方法, 当 $m = 1$, 分别取 $m = -1, -0.5, 0, 0.5$ 时, 曲线(点虚线)向左靠近.

图 2b 中, 固定 ω_i 的值, 且 $\omega_1 = \omega_2 = 2$ 时, 参数 m, n 同时由小到大变化曲线图, 分别是 $m = n = 1$ (点虚线), $m = n = 0.5$ (点线), $m = n = 0$ (实线), $m = n = -0.5$ (虚线)等曲线图, 而且当 $m = n = -1$ 时曲线退化为一 条直线段.

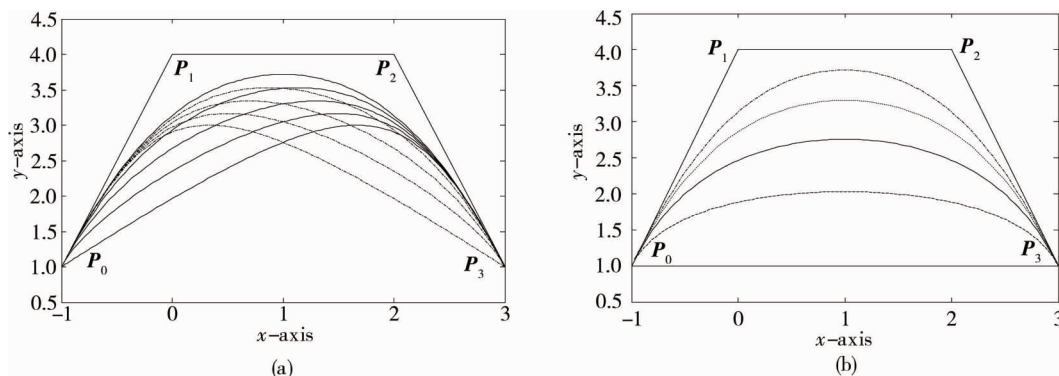


图 2 形状参数对 RQT-Bézier 曲线形状的影响

权因子对 RQT-Bézier 曲线形状的影响如图 3 所示. 图 3 中, 固定 m, n 的值, 且 $m = n = -0.5$ 时, 权因子由小到大变化曲线图分别是 $\omega_i = 3$ (点虚线), $\omega_i = 7$ (点线), $\omega_i = 15$ (实线), $\omega_i = 55$ (虚线)等曲线图, 当 $\omega_i = 0$ 时, 曲线退化为一 条直线段. 而当 $\omega_i > 0$ 且逐渐增大时, 曲线越靠近中间控制顶点, 并且无限向 4 个控制点靠拢, 但不会超出控制多边形.

定理 1 当 $u \in [0, 1], m = n = -1$, 或者 $\omega_i = 0(i = 1, 2)$ 时, RQT-Bézier 曲线均可表示成直线段.

证明: 当 $m = n = -1$ 时, 基函数式(1)可写成:

$$\begin{cases} f_0(u) = 1 - \sin^2 \frac{\pi}{2} u = k_1; \\ f_1(u) = 0; \\ f_2(u) = 0; \\ f_3(u) = 1 - \cos^2 \frac{\pi}{2} u = k_2. \end{cases} \quad (8)$$

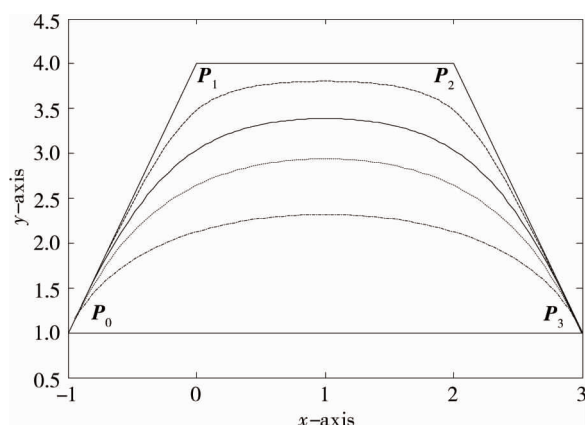


图 3 权因子对 RQT-Bézier 曲线形状的影响

这样,曲线式(3)简化为

$$f(u) = \frac{k_1 P_0 + k_2 P_3}{k_1 + k_2}. \quad (9)$$

由于 $k_1 + k_2 = 1$, 故 $f(u) = k_1 P_0 + k_2 P_3$, 曲线是首末端顶点 P_0 与 P_3 的直线段, 当 $\omega_i = 0 (i = 1, 2)$ 时, 同样也可证得曲线是首末端顶点 P_0 与 P_3 的直线段.

4 圆锥曲线表示

定理2 设 $P_i (i = 0, 1, 2, 3)$ 为 RQT-Bézier 曲线 4 个控制顶点, 我们取

$$P_0 = (a, -b), P_1 = (-a, 0), P_2 = (-a, 0), P_3 = (a, b). \quad (10)$$

$m = n = 0, \omega_i = 1 (i = 1, 2)$ 时, RQT-Bézier 曲线可表示为一个以 $(3a, 0)$ 为中心, 长半轴为 $2\sqrt{2}a$, 短半轴为 $\sqrt{2}b$ 的椭圆弧.

证明: 将 $m = n = 0, \omega_i = 1, P_0 = (a, -b), P_1 = (-a, 0), P_2 = (-a, 0), P_3 = (a, b)$ 代入式(3), 则 RQT-Bézier 曲线坐标为

$$\begin{cases} x(u) = 3a - 2a(\sin \frac{\pi}{2}u + \cos \frac{\pi}{2}u); \\ y(u) = b(\sin \frac{\pi}{2}u - \cos \frac{\pi}{2}u). \end{cases} \quad (11)$$

它满足 $(\frac{x-3a}{2a})^2 + (\frac{y}{b})^2 = 2$ 的方程, 是一个以 $(3a, 0)$ 为中心的椭圆弧.

推论1 当 $b = 2a$, 式(11)可写成:

$$\begin{cases} x(u) = 3a - 2a(\sin \frac{\pi}{2}u + \cos \frac{\pi}{2}u); \\ y(u) = 2a(\sin \frac{\pi}{2}u + \cos \frac{\pi}{2}u). \end{cases} \quad (12)$$

RQT-Bézier 曲线表示的是一个以 $(3a, 0)$ 为圆心, $2\sqrt{2}a$ 为半径的一段圆弧.

推论2 如果取 4 段 RQT-Bézier 曲线的控制顶点分别为 $P_{10} = (a, -2a), P_{13} = (a, 2a), P_{11} = P_{12} = (-a, 0); P_{20} = (a, 2a), P_{21} = P_{22} = (2a, 4a), P_{23} = (5a, 2a); P_{30} = (5a, 2a), P_{31} = P_{32} = (8a, 0), P_{33} = (5a, -2a), P_{40} = (5a, -2a), P_{41} = P_{42} = (2a, -4a), P_{43} = (a, -2a)$. 则 4 段 RQT-Bézier 曲线表示的是一个以 $(3a, 0)$ 为圆心, $2\sqrt{2}a$ 为半径的圆.

图4为 RQT-Bézier 曲线描述椭圆弧和圆弧表示法的图形.

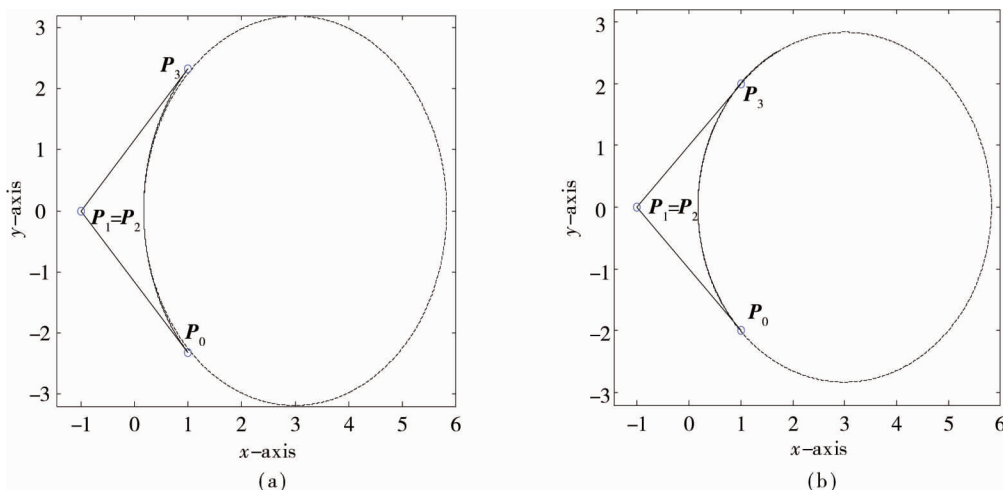


图4 RQT-Bézier 曲线椭圆弧与圆弧的表示

5 逼近性

在几何造型中,控制多边形为曲线提供了一个重要工具,在相同的控制顶点下,我们讨论带两个形状参数的 RQT-Bézier 与有理三次 Bézier 曲线的关系.

设 $P_i (i = 0, 1, 2, 3)$ 为不共线的控制点,有理三次 Bézier 曲线表示为

$$B(t) = \frac{\sum_{i=0}^3 P_i B_i(t) \lambda_i}{\sum_{i=0}^3 B_i(t) \lambda_i}, t \in [0, 1]. \quad (13)$$

式中: $B(t) = C_3^i (1-t)^{3-i} t^i$ 为伯恩斯坦多项式; $\lambda_i (i = 0, 1, 2, 3)$ 为权因子.

我们取相同的控制顶点,令 $P_{3/2} = \frac{(P_1 + P_2)}{2}$, 且满足 $\lambda_0 = \lambda_3 = 1, \lambda_i = \omega_i = v (i = 1, 2)$, 则一般的有理

三次 Bézier 曲线式(13)可写成:

$$B(t) = \frac{(1-t)^3 P_0 + 3v(1-t)^2 t P_1 + 3vt^2(1-t) P_2 + t^3 P_3}{(1-t)^3 + 3v(1-t)^2 t + 3vt^2(1-t) + t^3}. \quad (14)$$

显然有

$$\begin{cases} f(0) = B(0) = P_0; \\ f(1) = B(1) = P_3. \end{cases} \quad (15)$$

曲线插值于起点和终点,进一步有

$$B\left(\frac{1}{2}\right) - P_{3/2} = \frac{1}{2(1+3v)}(P_0 - P_1 - P_2 + P_3). \quad (16)$$

对式(2)曲线,当 $m = n$ 时,通过计算可得

$$f\left(\frac{1}{2}\right) - P_{3/2} = \frac{(\sqrt{2}-m)P_0 + (1+m)P_1 v + (1+m)P_2 v + (\sqrt{2}-m)P_3}{2(\sqrt{2}-m) + 2(1+m)v} - \frac{P_1 + P_2}{2}. \quad (17)$$

令 $g_1 = \sqrt{2} - m, g_2 = 1 + m$, 则

$$f\left(\frac{1}{2}\right) - P_{3/2} = \frac{g_1}{2(g_1 + g_2 v)}(P_0 - P_1 - P_2 + P_3) = \frac{(1+3v)g_1}{(g_1 + g_2 v)}(B\left(\frac{1}{2}\right) - P_{3/2}). \quad (18)$$

定理3 设 $P_i (i = 0, 1, 2, 3)$ 为不共线控制点,当 $m = n$, 且满足 $\lambda_0 = \lambda_3 = 1, \lambda_i = \omega_i = v (i = 1, 2)$ 时, RQT-Bézier 与有理三次 Bézier 曲线满足式(18).

推论 当且仅当 $0.8107 \leq m, n \leq 1$ 时, RQT-Bézier 曲线比有理三次 Bézier 曲线更逼近于控制多边形,且 $m = n = 0.8107$ 时,有

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = B\left(\frac{1}{2}\right). \quad (19)$$

此时, RQT-Bézier 曲线比有理三次 Bézier 曲线更逼近控制多边形.

图5展示了 RQT-Bézier 曲线,当 $m = n = -1$ 时,曲线为连接 $P_0 P_3$ 的线段,参数 $m = n = 0.8107$ 时, RQT-Bézier 曲线(虚线)比有理三次 Bézier 曲线更靠近控制多边形.

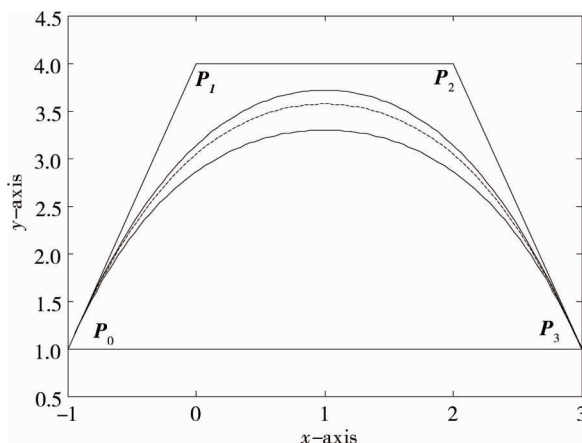


图5 RQT-Bézier 曲线 ($m = n = -1, 0.5, 0.8107, 1$)

6 结论

1) 本文构建了一类新的有理二次三角 Bézier 曲线(RQT-Bézier 曲线), 曲线除了具有有理三次 Bézier

曲线的性质外,另外给定的两个形状参数为设计者提供了额外地调整曲线的方法.

2) 曲线不仅可精确表示椭圆弧和圆弧,而且比有理三次 Bézier 曲线有更好的逼近;通过理论分析和实验说明了曲线的性质.

参考文献:

- [1] 施法中. 计算机辅助几何设计与非均匀有理 B 样条[M]. 北京: 高等教育出版社, 2001: 306-451.
- [2] Farin G E. Curves and surfaces for computer-aided geometric design: A Practical Guide (Fourth Edition) [M]. Boston: Academic Press, 1996.
- [3] Piegl L. On NURBS: a survey[J]. IEEE Computer Graphics and Applications, 1991, 11(1): 55-71.
- [4] Sarfraz M, Khan M A. Automatic outline capture of Arabic fonts[J]. Information Sciences, 2002, 140(3/4): 269-281.
- [5] Han X L. Quadratic trigonometric polynomial curves with a shape parameter[J]. Computer Aided Geometric Design, 2002, 19(7): 503-512.
- [6] Han X A, Ma Y C, Huang X L. The cubic trigonometric Bézier curve with two shape parameters[J]. Applied Mathematics Letters, 2009, 22(2): 226-231.
- [7] Wu X Q, Han X L, Luo S M. Quadratic trigonometric spline curves with multiple shape parameters[C]//Proceedings of 2007 10th International Conference on Computer-Aided Design and Computer Graphics, University of Beijing, IEEE, 2007: 413-416.
- [8] Han X. Piecewise quadratic trigonometric polynomial curves[J]. Mathematics of Computation 2003, 72(243): 1369-1377.
- [9] Han X L. Cubic trigonometric polynomial curves with a shape parameter[J]. Computer Aided Geometric Design, 2004, 21(8): 535-548.
- [10] Bashir U, Abbas M, Awang M N H, et al. The Quadratic trigonometric Bézier curve with single shape parameter[J]. Journal of Basic and Applied Scientific Research, 2012, 2(3): 2541-2546.
- [11] Uzma B, Abbas M, Awang M N H, et al. The Rational Quadratic Trigonometric Bézier Curve with two Shape Parameter[J]. Computational & Applied Mathematics, 2012, 31(1): 31-36.
- [12] Uzma B. Rational cubic trigonometric Bézier curve with two shape parameters[J]. Computational and Applied Mathematics, 2014, 1(94): 1-16.
- [13] Uzma B, Abbas M, Ali J M. The G^2 and C^2 rational quadratic trigonometric Bézier curve with two shape parameters with applications[J]. Applied Mathematics and Computation 2013, 219(20): 10183-10197.
- [14] 吴晓勤, 韩旭里, 罗善明. 带参的二次三角 Bézier 曲线[J]. 工程图学学报, 2008, 29(1): 83-87.