

王松华, 黎勇, 吴加其. 求解非线性单调方程组的修正三项 PRP 投影算法[J]. 湖南科技大学学报(自然科学版), 2019, 34(3): 111-118. doi:10.13582/j.cnki.1672-9102.2019.03.016

Wang S H, Li Y, Wu J Q. A Modified Three-term PRP Projection Method for Solving Nonlinear Monotone Equations [J]. Journal of Hunan University of Science and Technology (Natural Science Edition), 2019, 34(3): 111-118. doi:10.13582/j.cnki.1672-9102.2019.03.016

# 求解非线性单调方程组的修正 三项 PRP 投影算法

王松华<sup>1</sup>, 黎勇<sup>1\*</sup>, 吴加其<sup>2</sup>

(1. 百色学院 数学与统计学院, 广西 百色 533000;  
2. 广西大学 数学与信息科学学院, 广西 南宁 530004)

**摘要:** 针对求解大规模非线性单调方程组问题, 克服其他算法计算复杂、存储量需求和计算量大等不足, 基于经典 PRP (Polak-Ribière-Polyak) 共轭梯度法, 设计了一种新的搜索方向公式, 结合单调线搜索技术和投影算法, 提出一种修正三项 PRP 投影算法. 新算法具有充分下降性和信赖域特征等优点, 在适当的条件下新算法具有全局收敛性. 初步数值试验结果表明, 新算法对选取的测试问题上是有有效的, 数值表现总体上优于经典 PRP 共轭梯度法, 适合于求解大规模非线性单调方程组.

**关键词:** 非线性单调方程组; 共轭梯度法; 投影算法; 充分下降性; 全局收敛性

**中图分类号:** O211      **文献标志码:** A      **文章编号:** 1672-9102(2019)03-0111-08

## A Modified Three-term PRP Projection Method for Solving Nonlinear Monotone Equations

Wang Songhua<sup>1</sup>, Li Yong<sup>1</sup>, Wu Jiaqi<sup>2</sup>

(1. School of Mathematics and Statistics, Baise University, Baise 533000, China;  
2. College of Mathematics and Information Science, Guangxi University, Nanning 530004, China)

**Abstract:** In order to solve large-scale nonlinear monotone equations and overcome the shortcomings of other algorithms such as complex calculation, large storage requirement and large calculation amount, a new line search formula was designed based on classical PRP (Polak-Ribière-Polyak) conjugate gradient method, a modified three-term PRP projection algorithm was proposed by combining monotone line search technology and projection algorithm. The new algorithm had the advantages of sufficient descent and trust region characteristics. It possessed the global convergence in the proper conditions. The numerical results show that the new algorithm is effective for the selected test problems, and its numerical performance is generally better than the classical PRP conjugate gradient method, which is suitable for solving large-scale nonlinear monotone equations.

**Keywords:** nonlinear monotone equations; conjugate gradient method; projection algorithm; sufficient descent trait; global convergence

收稿日期: 2019-02-26

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11661001; 11661009); 广西自然科学基金资助项目(2014GXNSFAA118030)

\* 通信作者, E-mail: liyong3922@163.com

考虑非线性单调方程组问题:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \mathbf{x} \in R^n. \quad (1)$$

式中:  $\mathbf{F}: R^n \rightarrow R^n$  是单调连续可微函数.  $\mathbf{F}$  单调性定义为

$$\langle \mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{y}), \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle \geq 0, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^n. \quad (2)$$

非线性单调方程组在数值计算和工程实践等问题上有着广泛的应用,如非线性拟合、函数逼近、参数估计、化学平衡问题和物理电力方程等都可以转化为非线性方程组进行求解.关于非线性方程组的求解方法已经很多有效的算法,如牛顿法<sup>[1]</sup>、拟牛顿法<sup>[2]</sup>、高斯牛顿法<sup>[3]</sup>、Levenberg-Marquardt 法<sup>[4]</sup>和信赖域<sup>[5]</sup>等.这些算法对小规模问题普遍具有收敛速度快的特点,计算效率高.然而,在确定搜索方向时,每一步的迭代计算必须使用目标函数的 Jacobian 矩阵或近似 Jacobian 矩阵求解一个线性方程组,计算量非常大,因此这些算法在求解大规模非线性方程组问题上受到了限制<sup>[6]</sup>.

研究表明,基于投影的算法应用于非线性单调方程组具有良好的理论性质和数值效果<sup>[7-10]</sup>,能够有效求解非线性方程组.最具代表的是 Solodovy 和 Svaityery 提出的一种不精确牛顿型算法<sup>[7]</sup>,该算法采用超平面投影技术,不依赖正则条件下算法生成的序列整体收敛于问题(1)的解.我们知道,非线性共轭梯度法存储量小计算简便,是求解大规模最优化问题最有效的方法之一.近年来,结合超平面投影技术,将共轭梯度算法推广到大规模非线性方程组问题的研究成果表明,具有良好性质的共轭梯度法借助超平面投影技术更能有效解决求解大规模非线性单调方程组问题<sup>[11-16]</sup>.这里好的性质主要是指搜索方向不依赖任何线搜索具有自动充分下降性和信赖域的特征,那么相应算法在较弱的条件下具有全局收敛性.

受此启发,笔者在经典 PRP (Polak-Ribière-Polyak) 共轭梯度算法的基础上,设计一种新的搜索方向公式,结合文献[7]超平面投影技术,采用某种单调线搜索,建立一种求解非线性单调方程组的修正三项 PRP 投影算法,证明新算法在适当条件下具有充分下降性、信赖域特征和全局收敛性,并利用 Matla 程序对选取的测试函数进行初步的数值试验.

本文组织如下:在第1节给出新算法,第2节对新算法进行全局收敛性分析,然后在第3节通过数值试验分析新算法的有效性,最后在第4节给出结论.

## 1 修正三项 PRP 投影算法

首先将非线性单调方程组问题转化为最优化问题,然后回顾共轭梯度法的概念.一般地,令范数函数

$$\theta(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{F}(\mathbf{x})\|^2, \|\cdot\| \text{ 是欧几里德范数,则非线性单调方程组(1)等价于式(3)的全局最优化.}$$

$$\min \theta(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in R^n. \quad (3)$$

其迭代公式的一般形式为

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k. \quad (4)$$

式中:  $\alpha_k$  是步长,由某种线搜索确定;  $\mathbf{d}_k$  是搜索方向,迭代公式定义为

$$\mathbf{d}_k = \begin{cases} -\mathbf{F}_k, & \text{if } k = 1; \\ -\mathbf{F}_k + \beta_k \mathbf{d}_{k-1}, & \text{if } k \geq 2. \end{cases} \quad (5)$$

式中:  $\beta_k$  是一个共轭参数;  $\mathbf{F}_k$  为  $\mathbf{F}(\mathbf{x}_k)$  的简记.不同的共轭参数代表不同的共轭梯度法,最为经典的有 PRP 方法、HS (Hestenes-Stiefel) 方法、FR (Fletcher-Reeves) 方法、CD (Conjugate-Descent) 和 DY (Dai-Yuan) 方法等<sup>[17]</sup>,这些方法在不同的线搜索下的全局收敛性和数值性能已经得到广泛的研究. PRP 算法在数值表现上对于大规模优化问题是非常有效的,但是其全局收敛性并不令人满意,其中一个主要原因是搜索方向不满足充分下降性的条件.因此,研究者从三项共轭梯度法的角度对 PRP 算法进行推广<sup>[18-20]</sup>,如 Zhang 等<sup>[18]</sup>提出了三项 PRP 共轭梯度算法的搜索方向不依赖线搜索始终具有充分下降性.基于充分下降型三项共轭梯度法的思想,结合文献[11-12]的方法,本文设计一个新的搜索方向  $\mathbf{d}_k$ .

$$\mathbf{d}_k = \begin{cases} -\mathbf{F}_k, & \text{if } k = 1; \\ -\mathbf{F}_k + \frac{\mathbf{F}_k^\top \mathbf{Y}_k \mathbf{d}_{k-1} - \mathbf{F}_k^\top \mathbf{d}_{k-1} \mathbf{Y}_k}{\eta \|\mathbf{d}_{k-1}\| \|\mathbf{Y}_k\| + \|\mathbf{F}_{k-1}\|^2 + \min(v \|\mathbf{Y}_k\|^2 + \mu \|\mathbf{F}_{k-1}\| \|\mathbf{d}_{k-1}\|)}, & \text{if } k \geq 2. \end{cases} \quad (6)$$

式中:  $\mu, v, \eta, \lambda > 0$ ;  $\mathbf{Y}_k = \mathbf{F}_k - \mathbf{F}_{k-1}$ ;  $\mathbf{F}_{k-1}$  为  $\mathbf{F}(\mathbf{x}_{k-1})$  的简记.

考虑到在实际问题中,映射  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  一般是非光滑函数.同时,问题(3)的稳定点不一定是问题(1)的解,而 Solodov 和 Svaitery<sup>[7]</sup>指出超平面投影技术能直接求解问题(1),计算效率更好:假设当前迭代点  $\mathbf{x}_k$  和搜索方向  $\mathbf{d}_k$ ,按照某个线搜索得到步长  $\alpha_k$  得到一个点  $\mathbf{z}_k$ ,即  $\mathbf{z}_k = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k$ ,使得点  $\mathbf{F}(\mathbf{z}_k)^\top (\mathbf{x}_k - \mathbf{z}_k) > 0$ .如果对某个点  $\mathbf{x}_*$ ,使得  $\mathbf{F}(\mathbf{x}_*) = 0$ ,那么按照  $\mathbf{F}$  单调性定义,有  $\mathbf{F}(\mathbf{z}_k)^\top (\mathbf{x}_* - \mathbf{z}_k) < 0$ ,通过超平面  $\mathbf{H}_k = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{F}(\mathbf{z}_k)^\top (\mathbf{x} - \mathbf{z}_k) = 0\}$  能够将当前迭代点  $\mathbf{x}_k$  与非线性单调方程组(1)的解严格分离.然后再将点  $\mathbf{x}_k$  投影到超平面  $\mathbf{H}_k$ ,从而获得下一个迭代点  $\mathbf{x}_{k+1}$ ,也就是

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \frac{\mathbf{F}(\mathbf{z}_k)^\top (\mathbf{x}_k - \mathbf{z}_k)}{\|\mathbf{F}(\mathbf{z}_k)^\top\|^2} \mathbf{F}^\top(\mathbf{z}_k). \quad (7)$$

本文采用 Qi 和 Li 单调线搜索<sup>[21]</sup>来计算步长  $\alpha_k$ :

$$-\mathbf{F}(\mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k)^\top \mathbf{d}_k \geq \sigma \alpha_k \|\mathbf{F}(\mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k)\| \|\mathbf{d}_k\|^2. \quad (8)$$

式中:  $\alpha_k = \max\{s, \rho s, \rho^2 s, \dots\}$ ,  $\rho \in (0, 1)$ ,  $\sigma > 0$ ,  $s > 0$ .联合设计的修正三项 PRP 公式(6),采用在超平面投影技术式(7),建立一个新的求解非线性单调方程组的修正三项 PRP 投影算法.为便于表述,本文将该算法称为 MPRP 算法,其步骤如下:

步骤 1: 给定初始点  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ , 常数  $\mu, v, \eta > 0$ ;  $\rho, \varepsilon \in (0, 1)$ . 令  $k := 1$ ;

步骤 2: 若  $\|\mathbf{F}(\mathbf{x}_k)\| \leq \varepsilon$ , 则停止; 否则转步骤 3;

步骤 3: 通过式(6)计算搜索方向  $\mathbf{d}_k$ ; 采用线搜索式(8)计算步长  $\alpha_k$ ;

步骤 4: 令迭代公式为  $\mathbf{z}_k = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k$ ;

步骤 5: 若  $\|\mathbf{F}(\mathbf{z}_k)\| \leq \varepsilon$ , 则停止并令  $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{z}_k$ ; 否则,通过式(7)计算  $\mathbf{x}_{k+1}$ ;

步骤 6: 令  $k := k + 1$ , 转步骤 2.

## 2 全局收敛性分析

本文建立 MPRP 算法的全局收敛性需要用到以下一般性假设:

假设 A 非线性方程组(1)的解集不是空集.

假设 B  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  在集合  $\mathbb{R}^n$  内 Lipschitz 连续,即存在一个常数  $L > 0$ ,使得对任意  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ ,有

$$\|\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{y})\| \leq L \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|. \quad (9)$$

由假设 A 和假设 B,容易得出以下结论:

$$\|\mathbf{F}_k\| \leq \xi. \quad (10)$$

式中:  $\xi > 0$ .

首先我们分析搜索方向的充分下降性和信赖域特征,这不仅说明我们提出的新搜索方向  $\mathbf{d}_k$  是有意义的,同时这些性质对 MPRP 算法的全局收敛性分析起到重要的作用.

引理 1 如果搜索方向  $\mathbf{d}_k$  由式(6)给出,那么搜索方向  $\mathbf{d}_k$  有以下 2 个性质:

$$\mathbf{F}_k^\top \mathbf{d}_k \leq -\|\mathbf{F}_k\|^2. \quad (11)$$

和

$$\|\mathbf{F}_k\| \leq \|\mathbf{d}_k\| \leq \left(1 + \frac{2}{\eta}\right) \|\mathbf{F}_k\|. \quad (12)$$

成立.

证明:不难证明式(11)成立,并且由式(11)可以直接推出式(12)的左半部分.以下证明式(12)的右半

部分.

由定义(6),利用 Cauchy-Schwartz 不等式性质,得

$$\begin{aligned} \| \mathbf{d}_k \| &= \left\| -\mathbf{F}_k + \frac{\mathbf{F}_k^T \mathbf{Y}_k \mathbf{d}_{k-1} - \mathbf{F}_k^T \mathbf{d}_{k-1} \mathbf{Y}_k}{\eta \| \mathbf{d}_{k-1} \| \| \mathbf{Y}_k \| + \| \mathbf{F}_{k-1} \|^2 + \min(v \| \mathbf{Y}_k \|^2 + \mu \| \mathbf{F}_{k-1} \| \| \mathbf{d}_{k-1} \|)} \right\| \leq \\ &\| -\mathbf{F}_k \| + \left\| \frac{\mathbf{F}_k^T \mathbf{y}_k \mathbf{d}_{k-1} - \mathbf{F}_k^T \mathbf{d}_{k-1} \mathbf{y}_k}{\eta \| \mathbf{d}_{k-1} \| \| \mathbf{Y}_k \| + \| \mathbf{F}_{k-1} \|^2 + \min(v \| \mathbf{Y}_k \|^2 + \mu \| \mathbf{F}_{k-1} \| \| \mathbf{d}_{k-1} \|)} \right\| \leq \\ &\| -\mathbf{F}_k \| + \frac{2 \| \mathbf{F}_k^T \| \| \mathbf{Y}_k \| \| \mathbf{d}_{k-1} \|}{\eta \| \mathbf{d}_{k-1} \| \| \mathbf{Y}_k \|} = \left( 1 + \frac{2}{\eta} \right) \| \mathbf{F}_k \|. \end{aligned}$$

所以,式(12)成立.

下面的引理 2 说明,由 MPRP 算法生成的序列  $\{\mathbf{x}_k\}$  和  $\{\mathbf{z}_k\}$  有界,序列  $\{\| \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_* \| \}$  具有下降和收敛的性质.引理的证明及其性质类似文献[7],本文不再赘述.

引理 2 如果假设 A 和假设 B 成立,且  $\{\mathbf{x}_k\}$  是由 MPRP 算法生成.如果  $\mathbf{x}_*$  是非线性方程组(1)的解,即  $\mathbf{F}(\mathbf{x}_*) = 0$ , 那么有

$$\| \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_* \|^2 \leq \| \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_* \|^2 - \| \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k \|^2. \quad (13)$$

和

$$\sum_{k=0}^{\infty} \| \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k \|^2 < \infty. \quad (14)$$

成立.

联合超平面技术公式(7)和线搜索公式(6),得

$$\| \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k \| = \frac{\alpha_k | \mathbf{F}^T(\mathbf{z}_k) \mathbf{d}_k |}{\| \mathbf{F}(\mathbf{z}_k) \|^2} \| \mathbf{F}(\mathbf{z}_k) \| \geq \sigma \alpha_k \| \mathbf{d}_k \|^2.$$

从共轭梯度法的迭代公式出发,通过引理 2 的式(14),容易得到下面重要的结论:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k \| \mathbf{d}_k \| = 0. \quad (15)$$

下面的引理 3 说明线搜索能够保证得到一个正数步长,使得 MPRP 算法在有限步内停止,从而说明我们提出的 MPRP 算法是可行的.可以通过引理 1 的充分下降性和信赖域特征,结合假设 A 来证明.具体证明类似文献[22]的引理 2,本文不再赘述.

引理 3 如果假设 A 和假设 B 成立,则 MPRP 算法是可行的.

由引理 1,引理 2 和引理 3,结合假设 A 和假设 B 的一般性假设,下面我们可以得到 MPRP 算法的全局收敛性结论.

**定理 1** 如果假设 A 和假设 B 成立,且序列  $\{\alpha_k, \mathbf{d}_k, \mathbf{x}_k, \mathbf{F}_k\}$  由 MPRP 算法生成,则有

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \| \mathbf{F}_k \| = 0. \quad (16)$$

成立.

证明:反证法.

假设式(16)不成立,则存在一个正数  $\zeta > 0$ , 对  $\forall k \geq 0$ , 都有  $\| \mathbf{F}_k \| \geq \zeta$ .

由引理 1 的式(12),对  $\forall k \geq 0$  有

$$\| \mathbf{d}_k \| \geq \| \mathbf{F}_k \| \geq \zeta.$$

由引理 2 可知序列  $\{\mathbf{x}_k\}$  是有界的,因此对  $k \in N_1$  ( $N_1$  是一个无限指数集),必存在聚点  $\mathbf{x}^*$ , 使得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}^*.$$

由引理 1 式(12)和式(10),对  $\forall k \geq 0$ , 可得

$$\|d_k\| \leq \xi \left(1 + \frac{2}{\eta}\right).$$

所以序列  $\{d_k\}$  也是有界的.因此,必存在聚点  $d^*$  和一个无限指数集  $N_2 \subset N_1$ , 对  $k \in N_2$ , 使得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d_k = d^*.$$

联合引理 2 的结论式(15),可以推出:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0.$$

根据线搜索式(8)的定义,存在  $\alpha'_k = \frac{\alpha_k}{\lambda}$ , 使得下式成立

$$-F(x_k + \alpha'_k d_k)^T d_k < \sigma \alpha'_k \|F(x_k + \alpha'_k d_k)\| \|d_k\|^2.$$

当  $k \rightarrow 0$  时,上式两边对  $\forall k \in N_2$  同取极限,则有

$$F(x^*)^T d^* > 0.$$

再对引理 1 式(11)对  $\forall k \in N_2$  同取极限,得

$$F(x^*)^T d^* \leq 0.$$

显然以上 2 个不等式产生了矛盾.

所以,假设不成立,式(16)成立.证明完毕.

### 3 数值试验

为考查本文提出修正三项 PRP 投影算法的数值表现,我们将其与经典 PRP 共轭梯度法进行比较.本次试验具有初始点的 10 个测试函数选自文献[23-24],具体的函数名称与初始点见表 1.

表 1 测试函数

No.	函数名称	初始点 $x_0$
1	Exponential function 1	$\left(\frac{n}{n-1}, \frac{n}{n-1}, \dots, \frac{n}{n-1}\right)^T$
2	Exponential function 2	$\left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^2}, \dots, \frac{1}{n^2}\right)^T$
3	Trigonometric function	$\left(\frac{101}{101 * n}, \frac{101}{101 * n}, \dots, \frac{101}{101 * n}\right)^T$
4	Logarithmic function	$(1, 1, \dots, 1)^T$
5	Broyden Tridiagonal function	$(-1, -1, \dots, -1)^T$
6	Zero jacobian function	$\left(\frac{(n-1000) * (n-500)}{(60 * n)^2}, \frac{(n-1000) * (n-500)}{(60 * n)^2}, \dots, \frac{(n-1000) * (n-500)}{(60 * n)^2}\right)^T$
7	Variable dimensioned function	$\left(1 - \frac{i}{n}, 1 - \frac{i}{n}, \dots, 1 - \frac{i}{n}\right)^T$
8	Tridiagonal system	$(12, 12, \dots, 12)^T$
9	Extended Wood problem	$(0, 0, \dots, 0)^T$
10	Discrete boundry value problem	$\left(\frac{-n}{(n+1)^2}, \frac{-n}{(n+1)^2}, \dots, \frac{-n}{(n+1)^2}\right)^T$

试验环境:本次数值试验的电脑配置为 Windows 7 操作系统, Intel Pentium(R) DualCore CPU, E5800 3.2GZHZ, 内存 2G, 算法由 Matlab 2014a 编写运行.终止条件  $\|g(x)\| \leq 10^{-5}$ ,

参数设置:  $\mu = 0.0001, v = 0.0001, \eta = 0.0001, \varepsilon = 10^{-5}$ .

数值试验结果参见表 2.表 2 中各项说明如下:No.表示测试函数的序号;Dim 表示测试函数的维数;NI 表示迭代次数;NF 表示函数值的计算次数;CPUtime 表示试验所耗时间(单位:秒);GN 表示算法终止时  $F(x)$  的梯度值计算次数.

表2 数值试验结果

No.	Dim	MPRP 算法				PRP 算法				
		NI	NF	CPUtime/s	GN	NI	NF	CPU	CPUtime/s	GN
1	3 000	123	124	1.731 611	9.97E-06	129	130	1.700 411	9.97E-06	
	5 000	105	106	3.588 023	9.98E-06	109	110	3.728 424	9.91E-06	
	10 000	85	86	9.937 264	9.99E-06	86	87	10.545 668	9.94E-06	
2	3 000	55	210	1.606 810	9.28E-06	58	220	1.731 611	9.95E-06	
	5 000	25	101	2.121 614	9.17E-06	24	97	2.090 413	9.75E-06	
	10 000	99	459	31.652 603	9.51E-06	105	479	34.101 819	9.82E-06	
3	3 000	43	86	0.904 806	8.56E-06	48	95	1.045 207	8.65E-06	
	5 000	42	84	2.402 415	8.28E-06	46	91	2.293 215	9.74E-06	
	10 000	40	80	6.988 845	9.13E-06	44	87	7.722 049	9.98E-06	
4	3 000	5	6	0.156 001	1.01E-08	11	12	0.171 601	1.01E-08	
	5 000	5	6	0.234 002	6.26E-09	11	12	0.405 603	8.54E-09	
	10 000	5	6	0.842 405	3.62E-09	11	12	1.326 009	7.62E-09	
5	3 000	95	190	2.402 415	9.50E-06	104	208	1.918 812	9.24E-06	
	5 000	97	194	5.428 835	9.05E-06	106	212	4.914 031	9.13E-06	
	10 000	99	198	18.174 116	9.44E-06	108	216	18.267 717	9.88E-06	
6	3 000	299	1 914	13.010 483	6.79E+07	299	1 945	13.197 685	7.67E+07	
	5 000	299	1 942	34.460 621	8.15E+07	299	1 960	34.694 622	7.55E+07	
	10 000	299	1 929	125.050 402	8.31E+07	299	1 936	125.565 205	7.45E+07	
7	3 000	1	2	0.015 600	0	1	2	0.031 200	0	
	5 000	1	2	0.062 400	0	1	2	0.046 800	0	
	10 000	1	2	0.171 601	0	1	2	0.171 601	0	
8	3 000	299	936	7.815 650	2.45E+00	299	1 063	8.548 855	2.63E+00	
	5 000	299	928	19.375 324	3.41E-01	299	1 047	21.372 137	1.31E+00	
	10 000	299	930	70.122 449	3.96E-01	299	1 081	82.430 928	3.65E+00	
9	3 000	299	1 124	8.689 256	3.84E+00	299	1 114	10.592 468	1.17E+00	
	5 000	299	1 117	22.245 743	2.64E+00	299	1 120	23.134 948	1.24E+00	
	10 000	299	1 114	81.214 121	4.14E+00	299	1 120	80.886 518	1.56E+00	
10	3 000	35	71	0.748 805	9.26E-06	40	80	0.811 205	9.91E-06	
	5 000	34	69	1.747 211	8.64E-06	39	78	1.918 812	9.20E-06	
	10 000	32	65	5.865 638	9.30E-06	37	74	6.489 642	9.42E-06	

为更直观分析两种算法的综合性能,本文采用 Dolan 和 More 在文献[25]提出的评价准则进行综合比较.该评价准则基本办法:为了估算某种算法  $s$  对所有测试问题的效率,定义一个分布函数  $\rho_s(t) = \frac{1}{n_p} \text{size}\{p \in P: r_{p,s} \leq t\}$ ,  $\rho_s(t)$  的数值越大,算法  $s$  的数值表现就越好.横坐标  $t$  表示某种给定的数值比率,纵坐标  $\rho_s(t)$  表示算法  $s$  对应  $t$  的数值.如果将不同的算法所对应的分布函数曲线在同一坐标进行比较,那么,相对于相同的  $t$ ,曲线越靠上,相应的算法能够求解的个数越多,即算法越稳定;相对于求解相同百分比的问题而言,曲线越靠左,相应的算法的效率就越高.

下面给出的图 1~图 4,分别画出了 MPRP 算法与 PRP 算法基于迭代次数(NI)、目标函数值计算次数(NF)、系统运行的时间(CPU)和算法终止时范数值(NG)的分布函数  $\rho_s(t)$  的曲线比较图.

从图 1~图 3 看出,在计算精度相同的条件下,根据上述评价准则,MPRP 算法在迭代次数、目标函数数值计算次数和运行时间等 3 个指标上计算效率明显优于经典 PRP 算法;图 4 表明,算法终止时  $F(x)$  的梯度值的计算次数,MPRP 算法也比经典 PRP 算法好.这可能是 MPRP 算法具有充分下降性和信赖域的特征,结合超平面投影技术的有效应用,继承了经典 PRP 的良好数值性能,不仅能有效求解大规模非线性

单调方程组的解,效率比经典 PRP 算法更具竞争性.

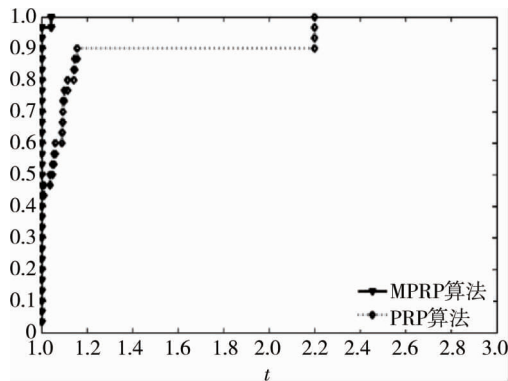


图1 2个算法的迭代次数性能

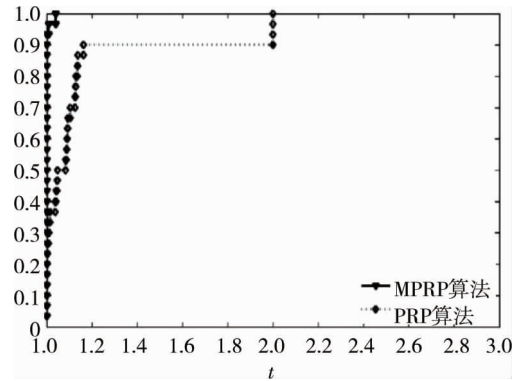


图2 2个算法的目标函数值计算次数性能

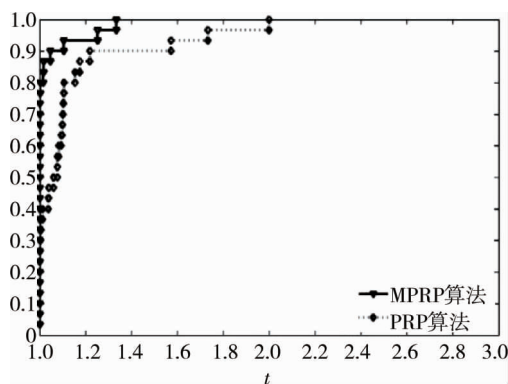


图3 2个算法的运行时间性能

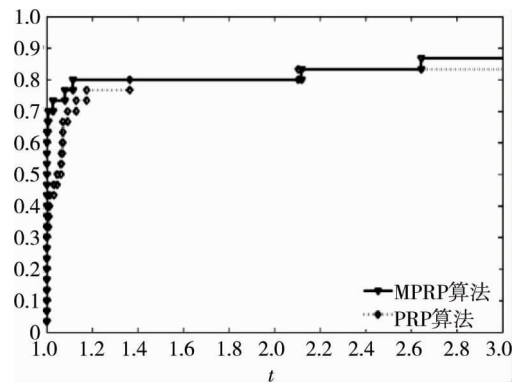


图4 2个算法的目标函数梯度值计算次数性能

## 4 结论

1) MPRP 算法的搜索方向不依赖任何线搜索,不仅具有充分下降性,还具有信赖域性质,使得算法在常规条件下是全局收敛的,相比于经典 PRP 算法需要较强条件才能具备全局收敛性质无疑是进步的.

2) 在精度相同的条件下,MPRP 算法数值结果总体上比经典 PRP 算法更优.

综上所述,MPRP 算法对解大规模非线性方程组问题是有效的.在未来的工作中,我们将尝试对 MPRP 算法的各种参数进行不同的调整和测试,来验证参数取值对 MPRP 算法效率的影响,从而进一步提高 MPRP 算法的效率,促使 MPRP 算法更具竞争性.另外,新算法对更高维的目标函数的求解效率,值得我们做深入的研究.同时,研究 MPRP 算法在数值计算和工程实践等实际应用,也有待继续探索.

## 参考文献:

- [1] Eisenstat S C, Walker H F. Globally convergence inexact newton methods[J]. SIAM J. Optimization, 1994, 4: 393-422.
- [2] Dennis J E, More J J. A characterization of superlinear convergence and its application to Quasi-Newton methods [J]. Mathematics of Computation, 1974, 28: 549-560.
- [3] Li D H, Fukushima M. A globally and superlinearly convergent gauss-newton-based BFGS method for symmetric nonlinear equations (eng) [J]. Siam Journal on Numerical Analysis, 2000, 37(1): 152-172.
- [4] Kanzow C, Yamashita N, Fukushima M. Levenberg-Marquardt methods for constrained nonlinear equations with strong local convergence properties[R]. Technical Report 2002-2007, Department of Applied Mathematics and Physics, Kyoto University, Kyoto, Japan, 2002.
- [5] Vrahatis M N, Androulakis G S, Lambrinos J N, et al. A class of gradient unconstrained minimization algorithms with adaptive

- stepsize [J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2000, 114(2): 367–386.
- [6] 刘金魁. 无约束最优化问题与非线性方程组的若干解法研究[D]. 重庆: 重庆大学, 2016.
- [7] Solodov M V, Svaiter B F. A globally convergent inexact newton method for systems of monotone equations[M]. *Reformulation: Nonsmooth, Piecewise Smooth, Semismooth and Smoothing Methods*. Springer US, 1998: 355–369.
- [8] 吴晓云, 周学良. 凸约束非线性方程组的一种无导数投影方法[J]. *数学的实践与认识*, 2018, 48(2): 119–126.
- [9] 刘金魁, 杜祥林. 非线性单调方程组的三项无导数投影算法[J]. *数学进展*, 2018, 47(4): 146–156.
- [10] Ahookhosh M, Amini K, Bahrami S. Two derivative-free projection approaches for systems of large-scale nonlinear monotone equations[J]. *Numerical Algorithms*, 2013, 64(1): 21–42.
- [11] Yuan G L, Zhang M. A three-terms Polak-Ribière-Polyak conjugate gradient algorithm for large-scale nonlinear equations [J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2015, 286: 186–195.
- [12] Yuan G L, Meng Z H, Li Y. A modified Hestenes and Stiefel conjugate gradient algorithm for large-scale nonsmooth minimizations and nonlinear equations[J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2016, 168(1): 129–152.
- [13] 胡亚萍. 非线性单调方程组和非光滑问题的算法研究[D]. 上海: 华东理工大学, 2015.
- [14] 陈香萍. 求解非线性单调方程组的一种无导数投影算法[J]. *数学的实践与认识*, 2017, 47(13): 168–175.
- [15] 吴春杰. 求解非线性方程组的两类共轭梯度法[D]. 开封: 河南大学, 2014.
- [16] Xiao Y H, Zhu H. A conjugate gradient method to solve convex constrained monotone equations with applications in compressive sensing[J]. *Journal of Mathematical Analysis & Applications*, 2013, 405(1): 310–319.
- [17] 戴彧虹, 袁亚湘. 非线性共轭梯度法[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 2000.
- [18] Zhang L, Zhou W, Li D H. Some descent three-term conjugate gradient methods for unconstrained optimization [J]. *Optimization Methods and Software*, 2007, 22(4): 697–711.
- [19] Dai Z F. Two modified HS type conjugate gradient methods for unconstrained optimization problems[J]. *Nonlinear Analysis*, 2011, 74: 927–936.
- [20] Andrei N. An accelerated subspace minimization three-term conjugate gradient algorithm for unconstrained optimization[J]. *Numerical Algorithms*, 2014, 65: 859–874.
- [21] Li Q, Li D H. A class of derivative-free methods for large-scale nonlinear monotone equations [J]. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 2011, 31(4): 1625–1635.
- [22] 黎勇, 邓婵莉. 一种求解大规模方程组的修正 Dai-Yuan 共轭梯度法[J]. *华中师范大学学报(自然科学版)*, 2017, 51(6): 731–735.
- [23] Bing Y, Lin G. An efficient implementation of merrill’s method for sparse or partially separable systems of nonlinear equations [J]. *Siam Journal on Optimization*, 1991, 1(2): 206–221.
- [24] Raydan M. The barzilai and borwein gradient method for the large scale unconstrained minimization problem[J]. *Siam Journal on Optimization*, 1997, 7(1): 26–33.
- [25] Dolan E D, Moré J J. Benchmarking optimization software with performance profiles[J]. *Mathematical Programming*, 2002, 91(2): 201–213.