龚日朝,谭可星,李诗音,等.基于均匀分布区间数的排序方法[J].湖南科技大学学报(自然科学版),2020,35(4):110-116. doi:10.13582/j.cnki.1672-9102.2020.04.016

Gong R Z, Tan K X, Li S Y, et al. Ranking Method Based on Interval Number of Uniform Distribution[J]. Journal of Hunan University of Science and Technology (Natural Science Edition), 2020,35(4): 110-116. doi:10.13582/j.cnki.1672-9102.2020.04.016

基于均匀分布区间数的排序方法

龚日朝[1],谭可星[1],李诗音[1*],龚泽权[2]

(1.湖南科技大学 商学院,湖南 湘潭 411201;2.大连交通大学 土木工程学院,辽宁 大连 116028)

摘 要:区间数在工程与管理评价中具有很好的应用价值,区间数排序是评价过程中必然遇到的问题.通过对区间数可能度概念及其计算模型的分析与比较,在用区间数内的一个随机变量大于或等于另外一个区间数内的一个随机变量的概率来构建可能度计算模型时,文章揭示了均匀分布区间数 $\mathbf{a}_1 \geqslant \mathbf{a}_2$ 的可能度大于等于0.5 等价于对应区间数的中值 $\alpha_1 \geqslant \alpha_2$ 的性质,证明了中值排序与优序数排序的等价性.

关键词:可能度;均匀分布区间数;排序法

中图分类号:C934 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-9102(2020)04-0110-07

Ranking Method Based on Interval Number of Uniform Distribution

Gong Rizhao[1], Tan Kexing[1], Li Shiyin[1], Gong Zequan[2]

(1. Business College, Hunan University of Science and Technology, Xiangtan 411201, China;

2. School of Civil Engineering, Dalian Jiaotong University, Dalian 116028, China)

Abstract: Interval number had a good application value in engineering and management evaluation. The sorting of interval number was an inevitable problem in the evaluation process. Through the analysis and comparison of the concept of interval number probability and its calculation model, when constructing a probability calculation model with a random variable within the interval number greater than or equal to a random variable within another interval number, it revealed that the probability of uniform distribution interval $\mathbf{a}_1 \geqslant \mathbf{a}_2$ is greater than or equal to 0.5, which is equivalent to the property of the median $\alpha_1 \geqslant \alpha_2$ of the corresponding interval number. Therefore, the equivalence between median sort and priority sort is proved.

Keywords: possibility degree; uniform distribution interval number; ranking method

基于区间数测度的工程管理评价和决策,区间数排序是无法规避的核心问题之一.针对区间数排序方法,目前可分为确定性和非确定性 2 类[1]:确定性排序法是从每一个区间数中提炼出一个具有代表性的实数进行排序,如区间数中值排序法[2-3];而非确定性排序法则是通过定义测度模型,度量一个区间数大于

收稿日期:2019-10-15

基金项目:国家社会科学基金资助项目(18BTJ036)

*通信作者,E-mail: 249865035@qq.com

另外一个区间数的程度,如可接受度[4-6]、可能度[7-12]、相似度[13]等计算模型.其中,基于可能度的排序法得到了学术界较高的认可.

基于可能度对区间数进行排序,关键的问题是可能度计算模型的构建和排序方法的设计.其中,构建可能度计算模型最核心的问题是理解可能度的内涵,理解什么叫一个区间数大于或等于另外一个区间数,从中提炼出主要特征从而形成测度模型.为此,Nakahara (1992)[8]、达庆利(1999)[10]、高峰记(2001)[11]、徐泽水(2003)[12]、兰继斌(2007)[14]、李德清(2008)[15]、肖峻(2011)[16]等先后构建不同的可能度计算模型.针对这些模型,高峰记(2013)[1]证明了前 4 个计算模型的等价性,但没有对它们的合理性和有效性进行剖析.我们分析发现,文献[16]运用概率论思想,即用区间数内的随机变量大于或等于另外一个区间数内的随机变量的概率而获得的计算模型相对合理且有效,而其他的计算模型都存在较多的信息遗漏.为此,本文采用文献[16]的计算模型开展后续问题研究.

对于基于可能度的区间数排序法设计,高峰记(2013)对以往学者所提出的排序法进行了比较和剖析,分析了各自的优缺点,证明了一些方法之间的等价性,并通过实例分析发现了一些学者所提出的方法不满足保序性,即不满足在原区间数序列的基础上添加或减少任意区间数后,原区间数序列的排序结果保持不变的性质.为此,高峰记(2013)基于可能度两两比较矩阵,提出了区间数的优序数新概念,构建了基于优序数排序的综合排序方法,实现了保序性.但是,作者在研究的过程中发现,这一方法的计算工作量比较大,给定 n 个区间数构建两两比较的可能度矩阵,必须依据可能度计算模型计算出 n^2 个可能度的值,特别是由于可能度计算模型都是依据两个区间数的位置关系而构成的分类计算模型,在可能度计算过程中首先还必须判断两两区间数端点的位置关系,因此,显然存在较大的工作量.当然,在计算机技术和编程技术高速发展的当下,计算量大不是主要问题.然而,在均匀分布区间数的条件下,作者利用文献[16]的计算模型与高峰记(2013)的优序数排序法结合,分析其可能度计算模型的性质,发现其排序结果与确定性的区间数中值排序法[17]等价.为此,本文从理论上对它们的等价性进行论证,厘清 2 种方法之间的关系,减少计算的复杂性.

1 区间数及其可能度概念

定义 1(区间数) 若 $-\infty < a^- \leqslant a^+ < +\infty$,则称实数轴上的有界区间 $[a^-,a^+]$ 为区间数,简记为 $\mathbf{a}=[a^-,a^+]$.如果 $a^- \geqslant 0$, 则称 $\mathbf{a}$ 为非负区间数;如果 $a^-=a^+=a$, 则 $\mathbf{a}$ 退化为实数 a.

本文将区间数 $\mathbf{a}=[a^-,a^+]$ 理解为随机变量 X 的取值区间,X 称为区间值变量,且全文假设 X 在取值区间内服从均匀分布,下文不再赘述.

定义 2(可能度) 设 $\mathbf{a}=[a^-,a^+]$ 和 $\mathbf{b}=[b^-,b^+]$ 是任意 2 个区间数,分别对应区间值变量 X 和 Y,则定义 $\mathbf{a}$ 大于等于 $\mathbf{b}$(简记为 $\{\mathbf{a}\geqslant\mathbf{b}\}$)的可能度为

$$P\{\mathbf{a}\geqslant\mathbf{b}\} \triangleq P\{X \geqslant Y \mid X \in [a^-,a^+], Y \in [b^-,b^+]\}.$$

根据 2 个区间上下限大小的 6 种大小关系,可能度可直观地解释为由 2 个相互独立的随机变量 X 和 Y 所构成的二维随机向量 (X,Y),在取值矩形区域 $D \triangleq \{(x,y) \mid x \in [a^-,a^+], y \in [b^-,b^+]\}$ 中,取值于直线 $y=x$ 下方的区域 $D^* \triangleq \{(x,y) \mid a^- \leqslant x \leqslant a^+, b^- \leqslant y \leqslant b^+, y \leqslant x\}$ 的概率.

根据概率论的基本理论,如果分布函数 $F(x)$ 和 $G(y)$ 对应的密度分别为 $f(x)$ 和 $g(y)$,二维随机向量 (X,Y) 的联合分布密度函数 $w(x,y)=f(x)\,g(y)$,则可能度 $P\{\mathbf{a}\geqslant\mathbf{b}\}$ 可用如式(1)表示.

定义 3 设 $\mathbf{a}=[a^-,a^+]$ 和 $\mathbf{b}=[b^-,b^+]$ 是任意 2 个区间数,分布函数分别为 $F(x)$ 和 $G(x)$,则可能度计算模型为

$$P\{\mathbf{a}\geqslant\mathbf{b}\} = \iint_{D^*} f(x)\,g(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{1}$$

式中: $D^* \triangleq \{(x,y) \mid a^- \leqslant x \leqslant a^+, b^- \leqslant y \leqslant b^+, y \leqslant x\}$.

特别地,在区间值变量 X 和 Y 均服从均匀分布的假设条件下,由式(1)即可得到文献[16]给出的可能度计算模型:

$$P\{\mathbf{a} \geqslant \mathbf{b}\} = \begin{cases} 0, \quad b^- > a^+; \\ \dfrac{(a^+ - b^-)^2}{2l_a l_b}, \quad a^- \leqslant b^- < a^+ \leqslant b^+; \\ \dfrac{a^- + a^+ - 2b^-}{2l_b}, \quad b^- \leqslant a^- < a^+ \leqslant b^+; \\ \dfrac{2a^+ - b^+ - b^-}{2l_a}, \quad a^- \leqslant b^- \leqslant b^+ \leqslant a^+; \\ 1 - \dfrac{(b^+ - a^-)^2}{2l_a l_b}, \quad b^- \leqslant a^- < b^+ \leqslant a^+; \\ 1, \quad b^+ \leqslant a^-. \end{cases} \tag{2}$$

式中: $l_{\mathbf{a}}, l_{\mathbf{b}}$ 为区间数的区间长度, $l_{\mathbf{a}} = a^+ - a^-, l_{\mathbf{b}} = b^+ - b^-$.

根据可能度,高峰记(2013)给出了如下区间数大小关系的定义.

定义 4[1] 设 $\mathbf{a} = [a^-, a^+]$ 和 $\mathbf{b} = [b^-, b^+]$ 是任意 2 个区间数,如果

1) $P\{\mathbf{a} \geqslant \mathbf{b}\} = 0.5$, 则称 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 拟等,记为 $\mathbf{a} \approx \mathbf{b}$; 特别地,如果 $a^- = b^-$ 且 $b^+ = a^+$, 则称 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 全等,记为 $\mathbf{a} = \mathbf{b}$;

2) $0.5 < P\{\mathbf{a} \geqslant \mathbf{b}\} < 1$, 则称 $\mathbf{a}$ 拟大于 $\mathbf{b}$, 记为 $\mathbf{a} > \mathbf{b}$;

3) $P\{\mathbf{a} \geqslant \mathbf{b}\} \geqslant 0.5$, 则称 $\mathbf{a}$ 拟大于或等于 $\mathbf{b}$, 记为 $\mathbf{a} \geq \mathbf{b}$; 特别地,如果 $P\{\mathbf{a} \geqslant \mathbf{b}\} = 1$, 则称 $\mathbf{a}$ 大于 $\mathbf{b}$, 记为 $\mathbf{a} > \mathbf{b}$.

2 可能度的性质

根据可能度计算模型,高峰记(2013)给出了如下可能度公理化性质.

性质 1[1] 设 $\mathbf{a}_i = [a_i^-, a_i^+]$,$i = 1,2,3$ 是任意 3 个区间数,则可能度计算模型式(2)满足:

1)规范性: $0 \leqslant P\{\mathbf{a}_1 \geqslant \mathbf{a}_2\} \leqslant 1$;

2)直观性:如果 $a_1^- \geqslant a_2^+$,则 $P\{\mathbf{a}_1 \geqslant \mathbf{a}_2\} = 1$;

3)互补性: $P\{\mathbf{a}_1 \geqslant \mathbf{a}_2\} + P\{\mathbf{a}_1 < \mathbf{a}_2\} = 1$;

4)传递性:如果 $P\{\mathbf{a}_1 \geqslant \mathbf{a}_2\} \geqslant 0.5, P\{\mathbf{a}_2 \geqslant \mathbf{a}_3\} \geqslant 0.5$, 则 $P\{\mathbf{a}_1 \geqslant \mathbf{a}_3\} \geqslant 0.5$, 当且仅当 $P\{\mathbf{a}_1 \geqslant \mathbf{a}_2\} = P\{\mathbf{a}_2 \geqslant \mathbf{a}_3\} = 0.5$ 时,$P\{\mathbf{a}_1 \geqslant \mathbf{a}_3\} = 0.5$;

5)优超性:如果 $P\{\mathbf{a}_1 \geqslant \mathbf{a}_2\} = 1$, 则 $P\{\mathbf{a}_1 \geqslant \mathbf{a}_3\} \geqslant P\{\mathbf{a}_2 \geqslant \mathbf{a}_3\}$.

同样根据可能度定义及其计算模型式(2),可能度有如下重要性质:

性质 2 设 $\mathbf{a}_i = [a_i^-, a_i^+]$,$i = 1,2$ 是任意 2 个区间数,区间中值分别为 $\alpha_i = (a_i^- + a_i^+)/2, i = 1,2$, 则 $P\{\mathbf{a}_1 \geqslant \mathbf{a}_2\} \geqslant 0.5$ 等价于 $\alpha_1 \geqslant \alpha_2$, 当且仅当 $P\{\mathbf{a}_1 \geqslant \mathbf{a}_2\} = 0.5$ 时, $\alpha_1 = \alpha_2$.

证明:为了方便,将区间数用区间中值 α_i 和区间半径 d_i 刻画,写成 $\mathbf{a}_i = [\alpha_i - d_i, \alpha_i + d_i]$,$i = 1,2$. 于是可能度计算模型式(2)可改写为

$$P\{\mathbf{a}_1 \geqslant \mathbf{a}_2\} = \begin{cases} 0, & \alpha_1 - \alpha_2 < -(d_1 + d_2); \\ \dfrac{(\alpha_1 - \alpha_2 + d_1 + d_2)^2}{8d_1d_2}, & -(d_1 + d_2) \leqslant \alpha_1 - \alpha_2 < \min(d_2 - d_1, d_1 - d_2); \\ \dfrac{\alpha_1 - \alpha_2}{2d_2} + \dfrac{1}{2}, & |\alpha_1 - \alpha_2| \leqslant d_2 - d_1; \\ \dfrac{\alpha_1 - \alpha_2}{2d_1} + \dfrac{1}{2}, & |\alpha_1 - \alpha_2| \leqslant d_1 - d_2; \\ 1 - \dfrac{(\alpha_1 - \alpha_2 - d_1 - d_2)^2}{8d_1d_2}, & \max(d_1 - d_2, d_2 - d_1) \leqslant \alpha_1 - \alpha_2 < d_1 + d_2; \\ 1, & \alpha_1 - \alpha_2 \geqslant d_1 + d_2. \end{cases} \tag{3}$$

下面只需证明 $P\{\mathbf{a}_1 \geqslant \mathbf{a}_2\} > 0.5$ 等价于 $\alpha_1 > \alpha_2$.

1) 如果 $\alpha_1 > \alpha_2$, 则根据式(3), 因为式(3)的前 2 种情形均是 $\alpha_1 < \alpha_2$, 且注意到 $\dfrac{(\alpha_1 - \alpha_2 + d_1 + d_2)^2}{8d_1d_2} < 0.5$ 恒成立,因此,只有其中后 4 种情形下 $P\{\mathbf{a}_1 \geqslant \mathbf{a}_2\} \geqslant 0.5$ 可能成立. 而在后 4 种情形下,有 $\dfrac{(\alpha_1 - \alpha_2 - d_1 - d_2)^2}{8d_1d_2} < 0.5$ 恒成立,因此,如果 $\alpha_1 > \alpha_2$,则均有 $P\{\mathbf{a}_1 \geqslant \mathbf{a}_2\} > 0.5$.

2) 如果 $P\{\mathbf{a}_1 \geqslant \mathbf{a}_2\} > 0.5$, 则同样根据式(3),在 $\alpha_1 - \alpha_2 < -(d_1 + d_2)$ 下有 $P\{\mathbf{a}_1 \geqslant \mathbf{a}_2\} = 0$; 当 $-(d_1+d_2) \leqslant \alpha_1 - \alpha_2 < \min(d_2 - d_1, d_1 - d_2)$ 时必然 $\alpha_1 < \alpha_2$, 同时 $\dfrac{(\alpha_1 - \alpha_2 + d_1 + d_2)^2}{8d_1d_2} < 0.5$ 恒成立,因此,根据式(3)当且仅当其中后 4 种情形下 $P\{\mathbf{a}_1 \geqslant \mathbf{a}_2\} > 0.5$, 同样注意到 $\dfrac{(\alpha_1 - \alpha_2 - d_1 - d_2)^2}{8d_1d_2} < 0.5$ 恒成立,此时必然有 $\alpha_1 > \alpha_2$.

注意到如果 $\alpha_1 = \alpha_2$, 很容易计算得到 $P\{\mathbf{a}_1 \geqslant \mathbf{a}_2\} = 0.5$, 因此,根据上述证明了 $P\{\mathbf{a}_1 \geqslant \mathbf{a}_2\} \geqslant 0.5$ 当且仅当 $\alpha_1 \geqslant \alpha_2$ 时成立. 证毕.

这一重要性质揭示了 2 个均匀分布区间数大小比较的可能度和它们的中值大小的内在逻辑关系,为简化高峰记(2013)提出的基于优序数大小排序方法奠定了基础.

3　区间数排序方法

记 n 个有界区间数构成的集合为

$\boldsymbol{\Gamma}_n = \{\mathbf{a}_i = [a_i^-, a_i^+], i = 1, 2, \cdots, n\}$.

基于可能度对区间数进行综合排序,高峰记(2013)通过实例分析指出以往的排序方法往往获得的排序结果相互不一致,即使某些学者提出的方法相互一致,如徐泽水(2007)与李德清和谷云东(2008)的排序方法具有完全相同的排序结果,但都不能满足保序性.所谓保序性是指在原区间数序列的基础上添加或减少任意区间数后,原区间数序列的排序结果保持不变.为此,对于给定的区间数集 $\boldsymbol{\Gamma}_n$, 高峰记(2013)基于可能度矩阵定义优序数,给出了一个具有保序性的排序方法,本文称之为优序数排序法.

3.1　优序数排序法

优序数排序法的具体过程如下[1]:

第一步:计算可能度矩阵 $\boldsymbol{\Pi} = (p_{ij})_{n\times n}$,其中 $p_{ij} = P\{\mathbf{a}_i \geqslant \mathbf{a}_j\}, i, j = 1, 2, \cdots, n$;

第二步:计算优序数 $\tau(\mathbf{a}_i) = \sum_{j=1}^{n} 1_{\{p_{ij} > 0.5\}}$, 其中 $1_{\{p_{ij} > 0.5\}} = \begin{cases} 1, & p_{ij} > 0.5 \\ 0, & p_{ij} \leqslant 0.5 \end{cases}$;

第三步:根据优序数大小进行排序.排序规则:如果 $\tau(\mathbf{a}_i) > \tau(\mathbf{a}_j)$,则 $\mathbf{a}_i \succ \mathbf{a}_j, i,j = 1,2,\cdots,n, i \neq j$.

基于该方法,高峰记(2013)给出并证明了如下重要定理:

定理 1[1] 对于给定的区间数集 $\boldsymbol{\Gamma}_n$,$\tau(\mathbf{a}_i)$ 为 $\mathbf{a}_i$ 的优序数,则

1)$\tau(\mathbf{a}_i) > \tau(\mathbf{a}_j)$ 的充分必要条件是 $\mathbf{a}_i \succ \mathbf{a}_j$, 即区间数 $\mathbf{a}_i$ 拟大于 $\mathbf{a}_j$;

2)基于优序数大小的区间数排序法具有保序性.

显然,该方法较好地解决了区间数综合排序的问题.但读者不难发现,这一排序方法的计算量比较大.主要工作量在于可能度矩阵的计算,不仅要计算 n^2 个可能度,而且根据可能度的分类计算模型,需要事先判断两两区间数的上、下限之间的大小关系,当区间数的个数比较大的时候,这一工作量是巨大的.同时,不难发现当几个区间数的区间中值相同时,它们的优序数相等,从而无法排序.

3.2 区间数中值排序法

本文对区间数的区间中值排序法[17]进行修正,根据性质 2 提出一个非常简单的排序方法,具体过程为

第一步:计算每个区间数的区间中值 $\alpha_i = \dfrac{(a_i^- + a_i^+)}{2}, i = 1,2,\cdots,n.$

第二步:根据区间中值 α_i 的大小进行排序.排序规则:(1)如果 $\alpha_i > \alpha_j$,则 $\mathbf{a}_i \succ \mathbf{a}_j, i,j = 1,2,\cdots,n, i \neq j$;(2)如果 $\alpha_i = \alpha_j$, 则当 $l_{\mathbf{a}_i} < l_{\mathbf{a}_j}$ 时 $\mathbf{a}_i \geq \mathbf{a}_j$, 其中 $l_{\mathbf{a}_i} = a_i^+ - a_i^-, l_{\mathbf{a}_j} = a_j^+ - a_j^-$.

在第二步中,本文利用了统计学中区间估计的有效性准则,即方差越小,中值的代表性越好的准则,因此,当两个区间数的中值相等时,规定区间长度小的区间数具有排序的优先性.

读者不难发现,利用区间数的区间中值大小进行排序,无论添加任何有界区间数或剔除任何区间数,都不会改变原有区间数集合中每个区间数的中值大小关系,因此,这一排序方法显然具有保序性,即具有如下的定理:

定理 2 对于给定的区间数集 $\boldsymbol{\Gamma}_n$, 区间数中值排序法具有保序性.

3.3 优序数排序法与区间数中值排序法的等价性

根据定理 1, $\tau(\mathbf{a}_i) > \tau(\mathbf{a}_j)$ 的充分必要条件是 $\mathbf{a}_i \succ \mathbf{a}_j$,而根据性质 2, $\mathbf{a}_i \succ \mathbf{a}_j$ 即 $P\{\mathbf{a}_i \geqslant \mathbf{a}_j\} > 0.5$ 等价于 $\alpha_i > \alpha_j$,因此,可以得到如下重要的结论:

定理 3 对于给定的区间数集 $\boldsymbol{\Gamma}_n$, 优序数 $\tau(\mathbf{a}_i) > \tau(\mathbf{a}_j)$ 的充分必要条件是区间数的中值 $\alpha_i > \alpha_j$.

于是,显然得到如下结论:

定理 4 如果区间数集 $\boldsymbol{\Gamma}_n$ 中区间数中值均不相等,则优序数排序法和区间数中值排序法具有一致的排序结果.

3.4 实例计算与比较分析

下面给出一些具体的区间数进行排序,检验 2 种排序方法的等价性.为了与高峰记(2013)的优序数排序法进行比较,选择了该文献中用于排序的 5 个区间数,同时为了进一步体现本文方法的有效性,添加了 3 个中值相等的区间数.具体数据如下:

$\mathbf{a}_1 = [0.188\,8, 0.197\,2]$,$\mathbf{a}_2 = [0.206\,8, 0.219\,8]$,$\mathbf{a}_3 = [0.198\,8, 0.207\,0]$,$\mathbf{a}_4 = [0.187\,4, 0.190\,7]$,$\mathbf{a}_5 = [0.187\,4, 0.196\,2]$,$\mathbf{a}_6 = [0.200\,0, 0.210\,0]$,$\mathbf{a}_7 = [0.190\,0, 0.220\,0]$,$\mathbf{a}_8 = [0.180\,0, 0.230\,0]$,其中,对于前 5 个区间数,高峰记(2013)给出的排序结果为 $\mathbf{a}_2 \succ \mathbf{a}_3 \succ \mathbf{a}_1 \succ \mathbf{a}_4 \succ \mathbf{a}_5$.

下面根据优序数排序法和本文的区间数中值排序法分别给出计算过程与结果,并进行比较分析.

3.4.1 优序数排序法的计算过程与结果

第一步:计算可能度矩阵,计算结果如表 1 所示.

第二步:计算区间数的优序数,结果见表 1.

第三步：根据优序数的大小，按照优序数从大到小排序，得到排序结果为 $\mathbf{a}_2 > \mathbf{a}_6 \approx \mathbf{a}_7 \approx \mathbf{a}_8 > \mathbf{a}_3 > \mathbf{a}_1 > \mathbf{a}_5 > \mathbf{a}_4$.

表 1　可能度矩阵及优序数

区间数	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{a}_4$	$\mathbf{a}_5$	$\mathbf{a}_6$	$\mathbf{a}_7$	$\mathbf{a}_8$	优序数
$\mathbf{a}_1$	0.500 0	0.000 0	0.000 0	0.934 9	0.629 6	0.000 0	0.102 9	0.260 0	2
$\mathbf{a}_2$	1.000 0	0.500 0	0.999 8	1.000 0	1.000 0	0.960 6	0.776 7	0.666 0	7
$\mathbf{a}_3$	1.000 0	0.000 2	0.500 0	1.000 0	1.000 0	0.290 0	0.430 0	0.458 0	3
$\mathbf{a}_4$	0.065 1	0.000 0	0.000 0	0.500 0	0.187 5	0.000 0	0.002 5	0.346 9	0
$\mathbf{a}_5$	0.370 4	0.000 0	0.000 0	0.812 5	0.500 0	0.000 0	0.072 8	0.236 0	1
$\mathbf{a}_6$	1.000 0	0.039 4	0.710 0	1.000 0	1.000 0	0.500 0	0.500 0	0.500 0	4
$\mathbf{a}_7$	0.897 1	0.223 3	0.570 0	0.997 5	0.927 2	0.500 0	0.500 0	0.500 0	4
$\mathbf{a}_8$	0.740 0	0.334 0	0.542 0	0.653 1	0.764 0	0.500 0	0.500 0	0.500 0	4

值得注意的是，对于给定的前 5 个区间数，本文的结果是 $\mathbf{a}_2 > \mathbf{a}_3 > \mathbf{a}_1 > \mathbf{a}_5 > \mathbf{a}_4$，与高峰记（2013）中的排序在 $\mathbf{a}_5$，$\mathbf{a}_4$ 上不同.事实上，从直观上可以看出：$\mathbf{a}_4 = [0.187\,4, 0.190\,7]$ 和 $\mathbf{a}_5 = [0.187\,4, 0.196\,2]$ 显然是 $\mathbf{a}_5 > \mathbf{a}_4$，因为这 2 个区间数的下限一样，而 $\mathbf{a}_5$ 的上限大于 $\mathbf{a}_4$. 我们经过分析发现，高峰记（2013）造成这一错误的原因是其利用李德清（2008）的可能度计算模型时计算出现错误，读者可以进行验算.此外，对于 $\mathbf{a}_6$，$\mathbf{a}_7$，$\mathbf{a}_8$ 这 3 个区间数，由于它们是区间中点重合的区间数，它们的优序数相等，因此，优序数大小排序法失效.

3.4.2　区间数中值排序法的计算过程与结果

第一步：计算区间数的区间中值，得到结果如表 2 所示.

第二步：根据中值大小排序，在中值相同的条件下利用本文提出的排序规则，得到排序结果为 $\mathbf{a}_2 > \mathbf{a}_6 \geq \mathbf{a}_7 \geq \mathbf{a}_8 > \mathbf{a}_3 > \mathbf{a}_1 > \mathbf{a}_5 > \mathbf{a}_4$.

表 2　区间数及其区间中值

区间数	下限	上限	中值	区间长度
$\mathbf{a}_1$	0.188 8	0.197 2	0.193 0	0.008 4
$\mathbf{a}_2$	0.206 8	0.219 8	0.213 3	0.013 0
$\mathbf{a}_3$	0.198 8	0.207 0	0.202 9	0.008 2
$\mathbf{a}_4$	0.187 4	0.190 7	0.189 1	0.003 3
$\mathbf{a}_5$	0.187 4	0.196 2	0.191 8	0.008 8
$\mathbf{a}_6$	0.200 0	0.210 0	0.205 0	0.010 0
$\mathbf{a}_7$	0.190 0	0.220 0	0.205 0	0.030 0
$\mathbf{a}_8$	0.180 0	0.230 0	0.205 0	0.050 0

显然，对于给定的前 5 个区间数，排序结果与优序数排序法完全一致，而且实现了区间数的合理的全排序，验证了 2 种方法的等价性结论.特别值得提出的是，本文提出的方法计算非常简单，极大地降低了优序数排序法的计算工作量，这是本文最大的发现价值，完美地解决了以往基于可能度排序的计算麻烦.

4　结论

1）区间数是人们基于客观事物的复杂性和对事物认知的模糊性，用区间估计系统参数或事物属性特征值的产物.在区间数评价和决策理论的发展过程中，区间数排序是最基本的理论之一.

2）对于均匀分布区间数的排序，优序数排序法与区间数中值排序法是等价的，但如果区间数是非均匀分布区间数，则这两个方法并不等价，我们将在以后进一步研究.

参考文献:

[1] 高峰记.可能度及区间数综合排序[J].系统工程理论与实践,2013,33(8):2033-2040.

[2] 吴江,黄登仕.区间数排序方法研究综述[J].系统工程,2004,22(8):1-4.

[3] 曾文艺,罗承忠,肉孜阿吉.区间数的综合决策模型[J].系统工程理论与实践,1997,17(11):48-50.

[4] Liu F. Acceptable consistency analysis of interval reciprocal multiplicative preference relations[J]. Fuzzy Sets System,2009,160:2686-2700.

[5] Xia M, Chen J. Studies on Interval Multiplicative Preference Relations and Their Application to Group Decision Making[J]. Group Decision & Negotiation, 2015, 24(1):115-144.

[6] Li K W, Wang Z J, Tong X. Acceptability analysis and priority weight elicitation for interval multiplicative comparison matrices[J]. European Journal of Operational Research, 2016, 250(2): 628-638.

[7] Senguta A, Pal T K. On comparing interval numbers[J]. European Journal of Operation Research, 2000, 127:28-43.

[8] Nakahara Y, Sasaki M, Gen M. On the linear programming problems with interval coefficients[C]// Conference on Computers and Industrial Engineering. Pergamon Press,1992:301-304.

[9] Liu F, Pan L H, Liu Z L, et al. On possibility-degree formulae for ranking interval numbers[J]. Soft Computing,2017(1/4):1-9.

[10] 达庆利,刘新旺.区间数线性规划及其满意解[J].系统工程理论与实践,1999,19(4):3-7.

[11] 高峰记,罗友仁.区间指派问题研究及应用[C]//中国系统工程学会决策科学专业委员会年会.2001: 267-271.

[12] 徐泽水,达庆利.区间数排序的可能度法及其应用[J].系统工程学报,2003,18(1):67-70.

[13] 龚日朝,谭可星,潘芬萍.区间数相似度计算模型及其应用研究[J].邵阳学院学报(自然科学版),2019,16(1):1-14.

[14] 兰继斌,曹丽娟,林健.基于二维优先度的区间数排序方法[J].重庆理工大学学报(自然科学), 2007,21(10):63-67.

[15] 李德清,谷云东.一种基于可能度的区间数排序方法[J].系统工程学报,2008,23(2):243-246.

[16] 肖峻,张跃,付川.基于可能度的区间数排序方法比较[J].天津大学学报(自然科学与工程技术版),2011,44(8):705-711.

[17] 胡启洲,张卫华.区间数理论的研究及其应用[M].北京:科学出版社,2010.