

李情,陈莘莘. 平面黏弹性力学问题的插值型重构核粒子法[J]. 湖南科技大学学报(自然科学版), 2021, 36(1):52-56. doi:10.13582/j.cnki.1672-9102.2021.01.008

LI Q, CHEN S S. Interpolating Reproducing Kernel Particle Method for Two-dimensional Viscoelastic Problems [J]. Journal of Hunan University of Science and Technology (Natural Science Edition), 2021, 36(1):52-56. doi:10.13582/j.cnki.1672-9102.2021.01.008

平面黏弹性力学问题的插值型重构核粒子法

李情*, 陈莘莘

(华东交通大学 土木建筑学院, 江西 南昌 330013)

摘要:插值型重构核粒子法的形函数结合了包含 Kronecker delta 特性的简单函数和由基函数向量采用重构条件构造的增强函数, 并且具有点插值特性和不低于核函数的高阶光滑性. 该方法可直接施加本质边界条件, 同时也保证了较高的计算精度. 基于插值型重构核粒子法, 文章提出了一种求解平面黏弹性力学问题的新方法. 采用弹性-黏弹性对应原理和 Laplace 变换, 将黏弹性问题转化为 Laplace 域内的准弹性问题, 并采用插值型重构核粒子法进行求解, 然后借助 Laplace 数值逆变换求得黏弹性问题的解. 数值算例验证了本文所提方法的有效性.

关键词:插值型重构核粒子法; Laplace 变换; 黏弹性; 对应原理

中图分类号: O39; TB125 文献标志码: A 文章编号: 1672-9102(2021)01-0052-05

Interpolating Reproducing Kernel Particle Method for Two-dimensional Viscoelastic Problems

LI Qing, CHEN Shenshen

(School of Civil Engineering and Architecture, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: The shape function of the interpolating reproducing kernel particle method combines a simple function including Kronecker delta property and an enhancement function constructed by the basis function vector using reconstruction conditions, and therefore has a point interpolation property and no less than the high-order smoothness of kernel function. This method can not only impose the essential boundary conditions directly but also assure the computational accuracy. A new method for the solution of two-dimensional viscoelastic problems was proposed based on the interpolating reproducing kernel particle method. By virtue of the elastic-viscoelastic correspondence principle and the Laplace transform technique, the viscoelastic problem was converted into a quasi-elastic problem in the Laplace domain, which was solved by the interpolating reproducing kernel particle method. Then the numerical inversion of Laplace transform was applied to obtain the viscoelastic solution. Numerical examples demonstrated the effectiveness of the proposed method.

Keywords: interpolating reproducing kernel particle method; Laplace transformation; viscoelasticity; correspondence principle

黏弹性材料在航空航天、土木工程、地下工程、海洋工程、生物工程和材料工程等领域都具有广阔的应

收稿日期: 2018-10-29

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11772129)

*通信作者, E-mail: liqing_726@163.com

用,越来越受到人们的重视^[1-4].对于线性黏弹性问题,积分变换是一种重要的数学工具.Laplace 变换的应用可以将黏弹性问题转化为准弹性问题,从而可以继承和借鉴弹性问题求解的各种方法^[5-6],然后再采用 Laplace 数值逆变换求得时间域的解^[7-9].

作为近年来兴起的一种数值方法,无网格法^[10-12]的共同特点是采用一系列的离散点来构造近似函数,可以彻底或部分消除网格,从而能够有效地消除网格存在带来的数值困难,是计算力学研究的热点之一.因此,许多学者将无网格法应用于求解黏弹性问题^[13-16].重构核粒子法(Reproducing Kernel Particle Method, RKPM)^[17]是目前应用较为广泛的无网格方法之一,但其形函数不满足插值特性,本质边界条件无法直接施加.插值型重构核粒子法^[18-20]通过一个简单函数引入插值条件,并由重构条件构造富集函数,从而得到一个具有任意离散点插值特性的形函数.本文将插值型重构核粒子法与 Laplace 变换相结合,提出了一种求解黏弹性平面问题的新方法.利用 Laplace 变换将黏弹性问题转化为 Laplace 域内的准弹性问题,并采用插值型重构核粒子法对其进行求解,然后采用 Laplace 数值逆变换得到黏弹性力学问题的解.最后,通过数值算例的分析验证了本文方法的正确性和有效性.

1 插值型重构核粒子法形函数

平面域 Ω 内任意点 x , 函数 $u(x)$ 的无网格近似函数可表示为 $u^h(x) = \sum \Psi_I(x) u_I$, 其中插值重构核粒子法的形函数表示为^[18-20]

$$\psi_I(x) = \hat{\psi}_I(x) + \bar{\psi}_I(x). \quad (1)$$

式中: $\hat{\Psi}_I(x)$ 为具有 Kronecker delta 特性的简单函数,它由 x_I 处的权函数 $\hat{\Phi}_{a_I}(x - x_I)$ 及其在粒子 x_I 的值来构造; $\bar{\Psi}_I(x)$ 为由基函数向量采用重构条件构造的增强函数,即

$$\hat{\Psi}_I(x) = \frac{\hat{\Phi}_{a_I}(x - x_I)}{\hat{\Phi}_{a_I}(0)}, \hat{a}_I < \min\{\|x_I - x_J\| \quad \forall J \neq I\}; \quad (2)$$

$$\bar{\Psi}_I(x) = \mathbf{H}^T(x - x_I) \mathbf{Q}^{-1}(x) [\mathbf{H}(0) - \hat{\mathbf{H}}(x)] \bar{\Phi}_{a_I}^-(x - x_I). \quad (3)$$

式中: $\mathbf{H}^T(x - x_I)$ 为基函数向量,且

$$\mathbf{H}^T(x - x_I) = [1 \quad x - x_I \quad \mathbf{y} - \mathbf{y}_I \quad \cdots \quad (\mathbf{y} - \mathbf{y}_I)^m]; \quad (4)$$

$$\mathbf{Q}(x) = \sum_I^N \mathbf{H}(x - x_I) (\mathbf{H}(x - x_I) \bar{\Phi}_{a_I}^-(x - x_I))^T; \quad (5)$$

$$\hat{\mathbf{H}}(x) = \sum_I^N \mathbf{H}(x - x_I) \hat{\Psi}_I(x). \quad (6)$$

式中: N 为计算点 x 影响域内离散粒子数目; m 为基函数的次数,本文取 $m = 6$.

为了便于形函数导数的计算,将式(3)改写为

$$\bar{\Psi}_I(x) = \mathbf{A}^T(x) \mathbf{B}(x). \quad (7)$$

式中:

$$\mathbf{A}^T(x) = \mathbf{H}^T(x - x_I) \mathbf{Q}^{-1}(x); \quad (8)$$

$$\mathbf{B}(x) = [\mathbf{H}(0) - \hat{\mathbf{H}}(x)] \bar{\Phi}_{a_I}^-(x - x_I). \quad (9)$$

因此, $\bar{\Psi}_I(x)$ 的偏导数为

$$\bar{\Psi}_{I,i}(x) = \mathbf{A}_{,i}^T(x) \mathbf{B}(x) + \mathbf{A}^T(x) \mathbf{B}_{,i}(x), \quad i = 1, 2. \quad (10)$$

若支持域取以 x_I 为中心的圆,则核函数 $\hat{\Phi}_{a_I}(x - x_I)$ 和 $\bar{\Phi}_{a_I}^-(x - x_I)$ 分别为

$$\hat{\Phi}_{a_I}(x - x_I) = \Phi(\|x - x_I\| / \hat{a}_I), \quad \bar{\Phi}_{a_I}^-(x - x_I) = \Phi(\|x - x_I\| / \bar{a}_I). \quad (11)$$

式中: $\hat{a}_I = 0.8d_I^1$; $\bar{a}_I = 2.5d_I^9$; d_I^1 和 d_I^9 分别为节点 x_I 到距其最近的第 1 个和第 9 个节点之间的距离.

2 平面黏弹性问题的插值型重构核粒子法

2.1 控制方程

考虑求解域为 Ω 的平面拟静态黏弹性问题,边界为 $\Gamma = \Gamma_t + \Gamma_u$, 则相应的基本方程为

1) 几何方程

$$\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i}) / 2. \quad (12a)$$

2) 平衡方程:

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0. \quad (12b)$$

3) 本构方程

$$s_{ij} = 2 \int_0^t G(t - \tau) \frac{de_{ij}}{d\tau} d\tau; \quad (12c)$$

$$\sigma_{kk} = 3 \int_0^t K(t - \tau) \frac{d\varepsilon_{kk}}{d\tau} d\tau. \quad (12d)$$

4) 边界条件

$$\sigma_{ij} n_j = \hat{t}_i, \text{ on } \Gamma_t; \quad (12e)$$

$$u_i = \hat{u}_i, \text{ on } \Gamma_u. \quad (12f)$$

式(12a)~式(12f)中: $\varepsilon_{ij}, u_i, \sigma_{ij}$ 和 F_i 分别为应变、位移、应力、体力分量; $K(t)$ 和 $G(t)$ 为体积松弛函数和剪切松弛函数; Γ_t 和 Γ_u 为给定的应力和位移边界; n_j 为边界的外法线方向余弦; \hat{t}_i 和 \hat{u}_i 为 Γ_t 和 Γ_u 上已知的面力和位移分量.

2.2 插值型重构核粒子法

根据 Laplace 变换

$$\bar{f}(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt. \quad (13)$$

式(12a)~式(12f)可变换为

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = (\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{j,i}) / 2; \quad (14a)$$

$$\bar{\sigma}_{ij,j} + \bar{F}_i = 0; \quad (14b)$$

$$\bar{s}_{ij} = 2s\bar{G}(s)\bar{e}_{ij}; \quad (14c)$$

$$\bar{\sigma}_{kk} = 3s\bar{K}(s)\bar{\varepsilon}_{kk}; \quad (14d)$$

$$\bar{\sigma}_{ij} n_j = \hat{t}_i, \text{ on } \Gamma_t; \quad (14e)$$

$$\bar{u}_i = \hat{u}_i, \text{ on } \Gamma_u. \quad (14f)$$

式(14a)~式(14f)中: s 为 Laplace 变换的转换参数; $\bar{\varepsilon}_{ij}, \bar{u}_i, \bar{\sigma}_{ij}$... 分别为 $\varepsilon_{ij}, u_i, \sigma_{ij}$... 的 Laplace 变换.

根据插值重构核粒子法, 平面 Ω 内任意点 x 处位移的 Laplace 变换可以表示为

$$\bar{\mathbf{u}}(x, s) = \sum_{l=1}^N \Psi_l(x) \bar{\mathbf{u}}_l(s). \quad (15)$$

式中: N 为计算点 x 定义域内的离散粒子数目; $\Psi_l(x)$ 为对应离散点的形函数.

将式(15)代入式(14a), 求得应变分量的 Laplace 变换 $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(x, s)$ 为

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(x, s) = \sum_{l=1}^N \mathbf{B}_l(x) \bar{\mathbf{u}}_l(s). \quad (16)$$

其中,

$$\mathbf{B}_l = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi_l}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \Psi_l}{\partial y} \\ \frac{\partial \Psi_l}{\partial y} & \frac{\partial \Psi_l}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (17)$$

再将式(16)代入式(14c)和式(14d), 可得应力向量的 Laplace 变换 $\bar{\boldsymbol{\sigma}}(x, s)$ 为

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}(x, s) = \mathbf{D}(s) \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(x, s) = \mathbf{D}(s) \sum_{l=1}^N \mathbf{B}_l \bar{\mathbf{u}}_l(s). \quad (18)$$

式中:平面应力问题的 $D(s)$ 可写为

$$D(s) = \frac{\bar{E}(s)}{1 - \bar{\nu}(s)^2} \begin{bmatrix} 1 & \bar{\nu}(s) & 0 \\ \bar{\nu}(s) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \bar{\nu}(s)}{2} \end{bmatrix}. \quad (19)$$

式中: $\bar{\nu}(s) = \frac{3s\bar{K}(s) - 2s\bar{G}(s)}{6s\bar{K}(s) + 2s\bar{G}(s)}$; $\bar{E}(s) = 2s\bar{G}(s) (1 + \bar{\nu}(s))$.

将式(15)、式(16)和式(18)代入虚位移原理,可推导出 Laplace 域内黏弹性力学平面问题的插值型重构核粒子法的控制方程为

$$K\bar{u} = f. \quad (20)$$

式中: K, \bar{u} 和 f 分别为 Laplace 域内的刚度矩阵、离散粒子的位移向量和载荷列向量,且有

$$K_{IJ} = \int_{\Omega} B_I^T D(s) B_J d\Omega; \quad (21a)$$

$$f_I = \int_{\Omega} \Psi_I^T \bar{F} d\Omega + \int_{\Gamma} \Psi_I^T \hat{t}_i d\Gamma. \quad (21b)$$

3 数值计算

为了验证上述方法的有效性,本文对 2 个典型算例进行了计算和分析.在进行 Laplace 数值逆变换时,本文采用了 Stehfest 算法^[21].

3.1 受轴向均布荷载的黏弹性平板

如图 1 所示,长 $L = 3.0$ m, 宽 $H = 1.0$ m 的黏弹性平板,在右端受到轴向均布荷载 $P = 2.0$ MPa,对于黏弹性材料,弹性模量 $E(t) = E_{\infty} + (E_0 - E_{\infty}) \exp(-t/t_0)$,其中 $E_0 = 2.0 \times 10^5$ MPa, $E_{\infty} = 1.0 \times 10^5$ MPa, $t_0 = 1.0$ s,泊松比 $\nu = 0.0$.

在准静态情况下,黏弹性板条右端轴向位移的解析解为

$$u = PL \left[\frac{E_{\infty} - E_0}{E_{\infty} E_0} \exp\left(-\frac{E_{\infty} t}{E_0 t_0}\right) + \frac{1}{E_{\infty}} \right]. \quad (22)$$

计算时,在求解域均匀布置 24×8 个离散粒子.图 2 给出了黏弹性板条右端轴向位移曲线的数值解和解析解的比较,从图 2 中可以看出本文的计算结果和解析解吻合很好,说明本文方法进行黏弹性分析是有效的.

3.2 厚壁圆筒的黏弹性解

如图 3 所示,设黏弹性厚壁圆筒受均匀内压力 $P = 1.0$ MPa,圆筒的内径 a 为 8 m,外径 b 为 16 m,该问题为平面应变问题.取 $G(t) = G_0 + G_1 \exp(-t/t_0)$, $K(t) = K_0$,其中, $G_0 = 1.20 \times 10^7$ MPa, $G_1 = 3.60 \times 10^7$ MPa, $K_0 = 1.280 \times 10^8$ MPa, $t_0 = 2.5$ s.

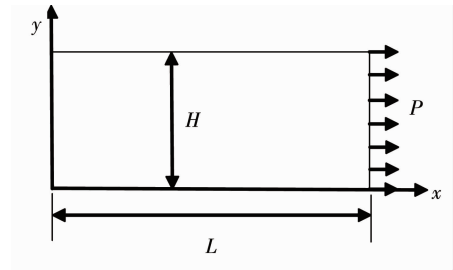


图 1 平板模型

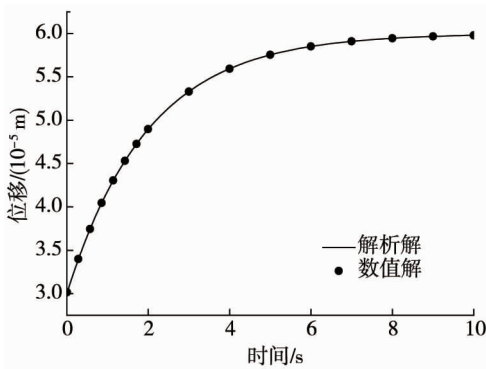


图 2 黏弹性板条右端的轴向位移

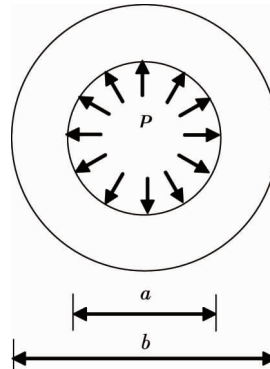


图 3 厚壁圆筒模型

由于对称性,只需取 $1/4$ 进行研究,径向和环向分别布置 9×20 个离散粒子.图 4 给出了黏弹性情况下,半径 $r=8$ m 和 $r=12$ m 处的位移随时间的变化曲线,由图 4 可知利用插值型重构核粒子法求解的结果与文献[22]的解吻合得很好,这进一步验证了本文方法的有效性.

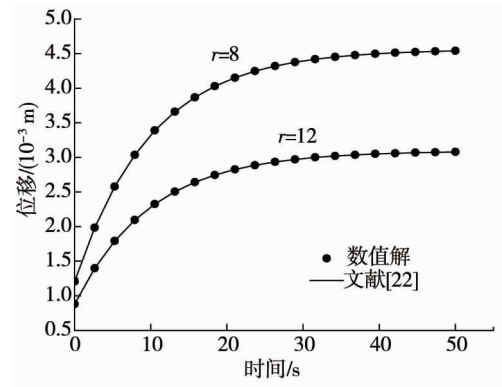


图 4 $r=8$ m 和 $r=12$ m 处径向位移随时间的变化

4 结论

1) 本文结合插值型重构核粒子法和 Laplace 变换,建立平面黏弹性问题的力学模型,编制了相应的 MATLAB 程序.算例计算表明此程序的计算结果与理论解符合良好,说明该分析方法的可行及有效性.

2) 本方法具有精度高、解题规模较小、可直接施加边界条件等优点,为求解黏弹性力学问题提供了一条新途径.

参考文献:

- [1] 刘林超, 闫启方, 牛洁楠. 分数导数 Kelvin 粘弹性土中管桩的扭转振动[J]. 土木建筑与环境工程, 2018, 40(6): 46-52.
- [2] 孙颖宏, 马卫平, 吕超凡. 粘弹性复合材料隔冲结构在水下非接触爆炸环境中的瞬态响应分析[J]. 机械强度, 2018, 40(2): 494-498.
- [3] 李潘, 郝志明, 刘永平, 等. 高聚物粘结炸药蠕变行为的近场动力学模拟方法[J]. 含能材料, 2017, 25(2): 118-124.
- [4] 许进升, 杨晓红, 赵磊, 等. 聚合物时温等效模型有限元应用研究[J]. 应用数学和力学, 2015, 36(5): 539-547.
- [5] 赵明皞, 程昌钧, 刘元杰. 粘弹性平面问题的不连续位移边界元方法[J]. 机械强度, 1996(4): 32-34.
- [6] 李焕荣, 罗振东, 李潜. 二维粘弹性问题的广义差分法及其数值模拟[J]. 计算数学, 2007(3): 251-262.
- [7] Rizzo F J, Shippy D J. An application of the correspondence principle of linear viscoelasticity theory [J]. Siam Journal on Applied Mathematics, 1971, 21(2): 321-330.
- [8] 程昌钧, 朱正佑. 关于粘弹性力学的一些进展[J]. 自然杂志, 2003, 25(3): 125-129.
- [9] 魏培君, 张双寅, 吴永礼. 粘弹性力学的对应原理及其数值反演方法[J]. 力学进展, 1999, 3: 317-330.
- [10] 张雄, 刘岩, 马上. 无网格法的理论及应用[J]. 力学进展, 2009, 39(1): 1-36.
- [11] Wang D, Wu J. An efficient nesting sub-domain gradient smoothing integration algorithm with quadratic exactness for Galerkin meshfree methods [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2016, 298: 485-519.
- [12] 王峰, 林皋, 郑保敬, 等. 基于滑动 Kriging 插值的无网格 MLPG 法求解结构动力问题[J]. 振动与冲击, 2014, 33(4): 27-31.
- [13] Yang H T, Liu Y. A combined approach of EFGM and precise algorithm in time domain solving viscoelasticity problems[J]. International Journal of Solids and Structures, 2003, 40(3): 701-714.
- [14] 朱媛媛, 胡育佳, 程昌钧. 无网格方法在平面粘弹性力学问题中的应用[J]. 力学季刊, 2006, 27(3): 404-412.
- [15] 彭妙娟, 刘茜. 粘弹性问题的改进的复变量无单元 Galerkin 方法[J]. 物理学报, 2014, 63(18): 44-52.
- [16] 陈莘莘, 钟斌. 二维粘弹性力学问题的无网格自然单元法[J]. 应用数学和力学, 2017, 38(5): 605-612.
- [17] Liu W K, Jun S, Zhang Y F. Reproducing kernel particle methods [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1995, 20: 1081-1106.
- [18] 杜红秀, 魏宏, 秦义校, 等. 轴对称构件受力分析的插值粒子法[J]. 物理学报, 2015, 64(10): 45-51.
- [19] Qin Y X, Liu Y Y, Li Z H, et al. An interpolating reproducing kernel particle method for two-dimensional scatter points [J]. Chinese Physics B, 2014, 23(7): 242-245.
- [20] 李中华, 秦义校, 崔小朝. 弹性力学的插值型重构核粒子法[J]. 物理学报, 2012, 61(8): 25-31.
- [21] Stehfest H. Algorithm 368: Numerical inversion of Laplace transforms [J]. Communications of the ACM, 1970, 13(1): 47-49.
- [22] Sang S L, Westmann R A. Application of high-order quadrature rules to time-domain boundary element analysis of viscoelasticity [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1995, 38(4): 607-629.