

周浩,杨大炼,蒋玲莉,等.几种典型齿轮时变啮合刚度计算方法对比[J].湖南科技大学学报(自然科学版),2021,36(4):62-70. doi:10.13582/j.cnki.1672-9102.2021.04.009

ZHOU H, YANG D L, JIANG L L, et al. A Comparison of Several Typical Gear Mesh Stiffness Calculation Methods [J]. Journal of Hunan University of Science and Technology (Natural Science Edition), 2021,36(4): 62-70. doi:10.13582/j.cnki.1672-9102.2021.04.009

几种典型齿轮时变啮合刚度计算方法对比

周浩¹,杨大炼^{1*},蒋玲莉^{1,2},李学军^{1,2}

(1.湖南科技大学 机械设备健康维护湖南省重点实验室,湖南 湘潭 411201;
2.佛山科学技术学院 机电工程与自动化学院,广东 佛山 528225)

摘要:啮合刚度是齿轮传动的重要动力学特性参数,当齿轮运行状态发生变化,如出现齿根裂纹时,这种变化会在时变啮合刚度中体现.准确地计算齿轮的时变啮合刚度对模拟齿轮系统的动力学特性意义重大.势能法、有限元法和石川法是计算齿轮时变啮合刚度的常用方法.以正常及含齿根裂纹的渐开线直齿圆柱齿轮为研究对象,对这3种方法的综合时变啮合刚度结果进行了对比分析,结果表明:有限元法计算速度慢,但更能够适用于多种复杂裂纹结构下的啮合刚度的计算,计算原理与实际工况更为吻合;势能法与石川法的计算速度快,对于简单裂纹或多级齿轮传动,可以优先采用势能法与石川法进行计算.

关键词: 齿轮;时变啮合刚度;势能法;有限元法;石川法

中图分类号: V231.96 **文献标志码:** A **文章编号:** 1672-9102(2021)04-0062-09

A Comparison of Several Typical Gear Mesh Stiffness Calculation Methods

ZHOU Hao¹, YANG Dalian¹, JIANG Lingli^{1,2}, LI Xuejun^{1,2}

(1. Hunan Provincial Key Laboratory of Health Maintenance for Mechanical Equipment, Hunan University of Science and Technology, Xiangtan 411201, China; 2. School of Mechatronic Engineering and Automation, Foshan University, Foshan 528225, China)

Abstract: Gear mesh stiffness is an important dynamic characteristic parameter of gear transmission. When the running state of gear changes, such as the occurrence of tooth root crack, this change will be reflected in the time-varying mesh stiffness. Accurate calculation of the time-varying mesh stiffness of gear is of great significance to accurately simulate the dynamic characteristics of gear system. Potential energy method, the finite element method and Ishikawa method is a commonly used method. The time-varying meshing stiffness was calculated, that of gear based on the normal and tooth root crack of involute spur gears as the research object, three methods of analysis were compared, the results show that the finite element method calculation speed is slow, but more able to apply to a variety of complex cracks under the structure of mesh stiffness calculation, calculation principle is more consistent with the actual working condition; The potential energy method and the Ishikawa method are fast to calculate. For simple crack or multistage gear transmission, the potential energy method and the Ishikawa

收稿日期:2019-09-17

基金项目:国家自然科学基金资助项目(11872022);湖南省自然科学基金资助项目(2021JJ30267);教育厅优秀青年项目资助(21B0484);湖湘青年英才支持计划资助项目(2017RS3049)

*通信作者, E-mail: hyydl216@163.com

method are preferred.

Keywords: gear; gear time - varying mesh stiffness; potential energy method; finite element method; Ishikawa method

齿轮传动系统广泛应用于机床、车辆、航空航天等领域,是机械系统中应用最广泛的动力和运动传递装置.齿轮系统的振动、冲击和噪声特性是高性能齿轮传动关注的重点,而啮合刚度的变化则是引起齿轮系统出现振动、冲击与噪声的主要因素之一.影响齿轮啮合刚度的因素较多,如啮合位置、作用载荷、载荷分布、齿轮修形、轮齿误差与轮齿变形等^[1].在不适当的工作条件、材料缺陷、制造误差等情况下,齿轮通常会沿齿根位置产生裂纹,裂纹会导致上述一个或多个因素发生明显变化,继而引起齿轮啮合刚度的变化,啮合刚度是表征齿轮裂纹故障的重要参数^[2].

动力学建模与分析是研究齿轮系统的振动、冲击和噪声特性的有效手段.准确地模拟齿轮传动系统的动力学特性,揭示齿轮系统的振动、冲击和噪声产生机理,可为齿轮传动系统的优化设计、服役性能预测以及故障诊断等提供理论基础.最初的齿轮系统动力学模型的集中质量模型中,齿轮均考虑为理想形式,啮合刚度为一固定值,致使一些刚度激励引起的重要现象常常被遗漏^[3].实际的啮合刚度具有时变特性,随着齿轮研究的不断深入,齿轮时变啮合刚度的准确计算受到越来越多的关注,齿轮裂纹时变啮合刚度的计算也成为重要的研究方向,涌出了大量不同的齿轮裂纹时变啮合刚度的计算方法^[4].准确地计算齿轮裂纹时变的啮合刚度,对模拟传动系统齿轮裂纹故障的动力学特性意义重大.

获取齿轮时变啮合刚度的方法主要有解析法(如势能法、石川法)、有限元法、实验法等,文章以正常及含齿根裂纹的渐开线直齿圆柱齿轮为研究对象,在相同条件下,忽略轴、轴承引起的刚度效应,同时考虑齿轮的轮体刚度效应,使用目前齿轮时变啮合刚度计算方法中普遍使用的势能法、有限元法和石川法3种方法计算时变啮合刚度,并对这3种方法的优劣进行对比分析研究.

1 势能法

目前,势能法是解析法中计算时变啮合刚度应用最广的方法之一.1953年,Weber等^[5]提出使用势能原理研究齿轮的受载情况;1987年,Yang和Lin^[6]将齿轮模型假设为悬臂梁模型,考虑赫兹接触效应、弯曲效应和轴向压缩效应,利用势能原理确定了正常齿的时变啮合刚度;Tian^[7]在Yang^[6]的基础上考虑剪切效应,将解析模型进一步完善;Wu等^[8]假设齿轮为变悬臂梁且固定于基圆上,忽略基圆与齿根圆之间的势能.在裂纹研究上,Chaari等^[9]和Mohammed等^[10]提出了裂纹在齿根位置沿直线扩展的解析模型;Chen和Shao^[11]假设裂纹在齿根沿齿宽和齿厚方向同时传播,植入早期故障裂纹解析模型,研究了裂纹扩展路径对时变啮合刚度的影响特性规律;张玲玉等^[12]和万志国等^[13]考虑了齿根圆和基圆不重合情况,改进变截面悬臂梁模型;Ma等^[14],Li等^[15]和Huangfu等^[16]提出多种不同裂纹扩展解析模型,进一步完善了解析模型.

1.1 势能原理

悬臂梁模型如图1所示.根据文献[11],在分析计算直齿轮正常齿时,在啮合力 F 的作用下, P 点啮合线处的齿形变形需要考虑3个影响因素:(1)赫兹接触引起的局部刚度 K_h ;(2)齿轮齿的基本挠度,包括弯曲刚度 K_b ,剪切刚度 K_s 和轴向压缩刚度 K_a ;(3)齿轮基础体的柔性引起的挠度 K_f .

$$\frac{1}{K_b} = \int_0^d \frac{(x \cos \alpha_1 - h \sin \alpha_1)^2}{EI_x} dx;$$

$$\frac{1}{K_s} = \int_0^d \frac{1.2 \cos^2 \alpha_1}{GA_x} dx;$$

$$\frac{1}{K_a} = \int_0^d \frac{\sin^2 \alpha_1}{EA_x} dx;$$

$$\frac{1}{K_h} = \frac{4(1-v^2)}{\pi EB};$$

$$\frac{1}{K_f} = \frac{\delta_f}{F}.$$

式中: d 为载荷作用点沿齿高方向的距离; α_1 为压力角; h 为载荷作用点沿齿宽方向的距离; E 为杨氏弹性模量; I_x, A_x 分别为截面积惯性矩和积分截面积, 对于不含裂纹的轮齿, I_x, A_x 按照整个齿形积分, $I_x = \frac{1}{12}(h_x + h_x)^3 B, A_x = (h_x + h_x) B$; G 为剪切模量, $G = \frac{E}{2(1+v)}$; v 为泊松比; B 为齿宽; δ_f 为齿轮基础体受载荷产生的变形.

综合时变啮合刚度可以表示为

$$K_e = \frac{1}{\frac{1}{K_h} + \frac{1}{K_{b_1}} + \frac{1}{K_{s_1}} + \frac{1}{K_{a_1}} + \frac{1}{K_{f_1}} + \frac{1}{K_{b_2}} + \frac{1}{K_{s_2}} + \frac{1}{K_{a_2}} + \frac{1}{K_{f_2}}}. \quad (1)$$

式中: K_{b_1}, K_{b_2} 为主动轮和从动轮的弯曲刚度; K_{s_1}, K_{s_2} 为主动轮和从动轮的剪切刚度; K_{a_1}, K_{a_2} 为主动轮和从动轮的轴向压缩刚度; K_{f_1}, K_{f_2} 为主动轮和从动轮的齿轮基础体产生的挠度.

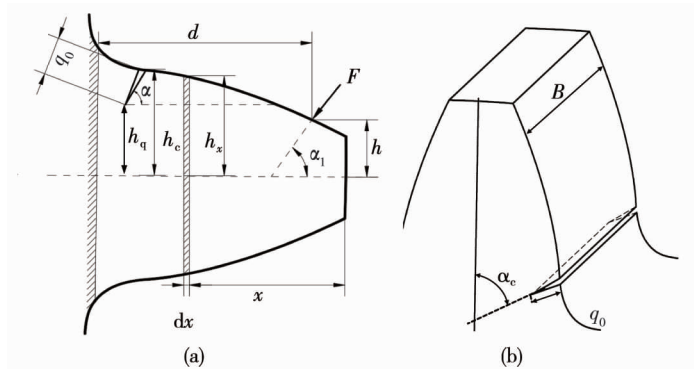


图1 悬臂梁模型

在对直齿轮的裂纹分析中, 假设裂纹为贯穿齿宽裂纹, 且裂纹深度保持不变. 根据文献[11]可知: 植入的裂纹只对 I_x, A_x 产生影响, 且随着裂纹的植入, 截面积惯性矩和积分截面会发生相应的变化, 从而会影响其弯曲刚度、剪切刚度和轴向压缩刚度, 而接触刚度和齿轮体引起的偏转挠度不变.

I_x, A_x 的计算如下:

$$I_x = \begin{cases} \frac{1}{12}(h_x + h_x)^3 B, h_x \leq h_q; \\ \frac{1}{12}(h_x + h_q)^3 B, h_x > h_q. \end{cases}$$

$$A_x = \begin{cases} (h_x + h_x) B, h_x \leq h_q; \\ (h_x + h_q) B, h_x > h_q. \end{cases}$$

式中: h_x 为齿廓线上的点到中心线的距离; B 为齿宽; h_q 为裂纹尖端到中心线的距离, $h_q = h_c - q_0 \sin \alpha_c$ (q_0, α_c 分别为裂纹深度和裂纹初始倾角).

含裂纹齿的综合时变啮合刚度计算同式(1).

1.2 案例分析

选取齿轮的主动轮和从动轮均以右工作面作为工作面, 以主动轮转动角度为判断依据. 主动轮和从动轮的计算参数: 齿数 $Z=30$, 模数 $m=3$ mm, 齿宽 $B=30$ mm, 变位系数为 0, 压力角 $\alpha_1=20^\circ$, 弹性模量 $E=2.0684$ GPa, 泊松比 $v=0.3$, 转矩 $T=200$ N·m, 摩擦系数为 0.05.

在忽略齿面形状、几何误差的情况下,通过势能法计算正常齿单个啮合周期内的啮合刚度,所得的综合时变啮合刚度曲线如图 2 所示。

对主动轮植入尺寸为裂纹深度 $q_0 = 0.5 \text{ mm}$, 裂纹初始倾角 $\alpha_c = 33^\circ$ 的张开型齿根贯穿裂纹,并通过式 (1) 计算综合时变啮合刚度如图 3 所示,图 3 中啮合角度根据主动轮的转动角度进行绘制。

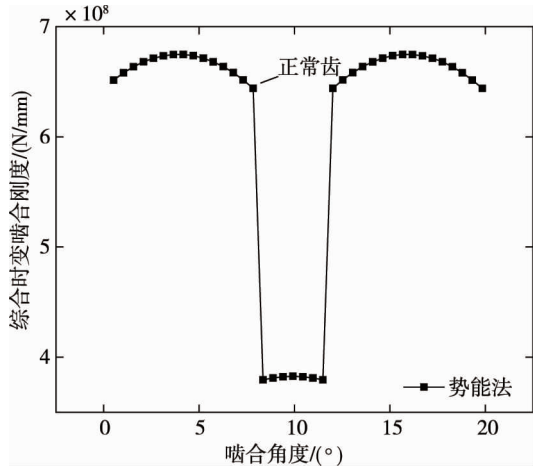


图 2 势能法正常齿综合时变啮合刚度曲线

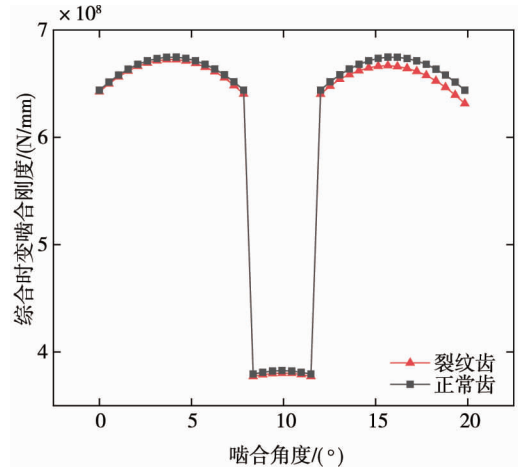


图 3 势能法含裂纹综合时变啮合刚度曲线

由图 3 可知:植入裂纹后的齿轮啮合刚度明显下降,同时,随着啮合角度的不断增大,含裂纹齿的啮合刚度与正常齿的啮合刚度的变化幅值有着缓慢增大的趋势.在裂纹齿进入啮合时的啮合刚度趋势的变化较小,在退出啮合时啮合刚度的变化幅度较大,这是由于在齿顶圆位置处弹性较大导致的.含裂纹齿与正常齿之间的时变啮合刚度相对变化幅值区间为 $0.21\% \sim 1.91\%$ 。

2 有限元法

考虑整个啮合齿轮副的影响,2001 年,Howard 等^[17] 基于线弹性断裂力学假设提出二维平面应变单元构建裂纹齿有限元模型.在此基础上,考虑轮齿延迟接触效应,Wang^[18] 提出了基于弹塑性断裂力学的裂纹齿有限元模型,研究齿根裂纹对啮合刚度的影响规律;Ma 等^[19] 研究不同裂纹深度和齿根裂纹衰减效应对轮体刚度的影响;Chaari 等^[9] 和 Zouari 等^[20] 通过对裂纹齿有限元模型施加线性集中力,研究了不同裂纹参数对啮合刚度的影响规律。

2.1 有限元法原理

由文献[17]可知:在微小角位移的情况下,齿轮的扭转与横向运动存在耦合关系.齿轮扭转与横向运动耦合关系如图 4 所示,通过法向接触力作用于主动轮基圆处的啮合线作用方向上,使得两者之间存在转换关系,因此可以将扭转啮合刚度转换为线性啮合刚度,且线性啮合刚度 K_m 的表达式为

$$K_m = \frac{T/R_{b1}}{R_{b1}\Delta\theta} = \frac{T}{R_{b1}^2\Delta\theta}$$

式中: T 为施加在轴孔处的转矩; R_{b1} 为主动轮的基圆半径; $\Delta\theta$

2.2 案例分析

根据文献[17]所示的有限元方法计算 1.2 节中所示参数的直齿轮综合时变啮合刚度,齿轮副的啮合接触分析模型如图 5 所示.在标有“Torque”的内孔面的齿轮(主动轮)施加扭矩,计算小齿轮的旋转.从动齿轮受到约束,即在图 5 中的“Fixed”表面没有刚体转动,但在这个表面上

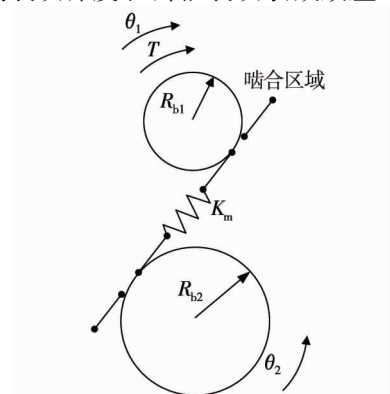


图 4 齿轮扭转与横向运动耦合关系

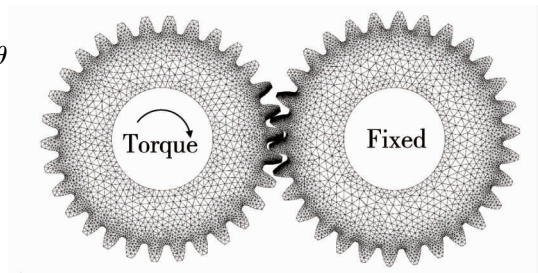


图 5 有限元啮合模型

的点(以及在施加扭矩的小齿轮表面标有“Torque”的啮合位置处的点)会发生弹性变形.

在忽略齿面几何误差的情况下,对不含裂纹的齿轮进行非线性啮合接触分析,以主动轮旋转角度为判断依据,正常齿3个啮合周期内的综合时变啮合刚度曲线如图6所示.

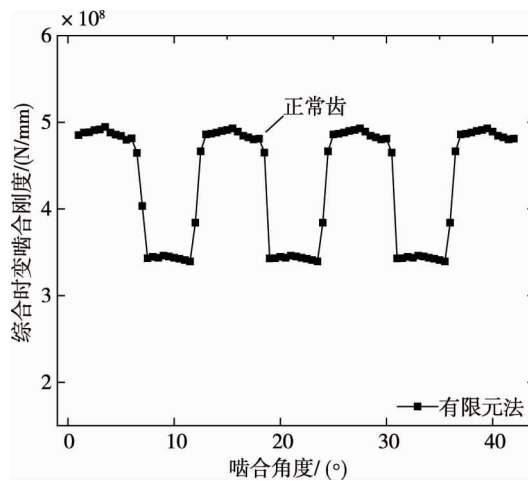


图6 有限元法正常齿综合时变啮合刚度曲线

在主动轮齿根圆与基圆附近植入贯穿式裂纹(裂纹深度 $q_0 = 0.5 \text{ mm}$, 裂纹初始倾角 $\alpha_c = 33^\circ$),裂纹齿模型如图7所示.植入裂纹后的综合时变啮合刚度曲线如图8所示.

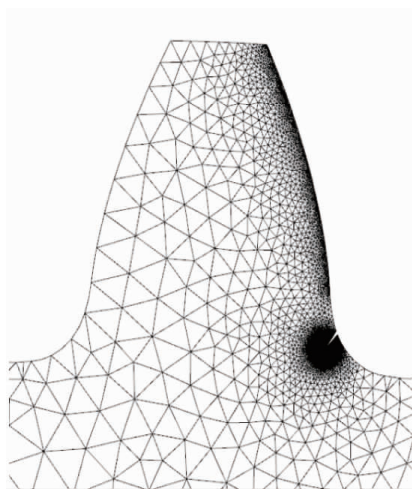


图7 裂纹齿模型

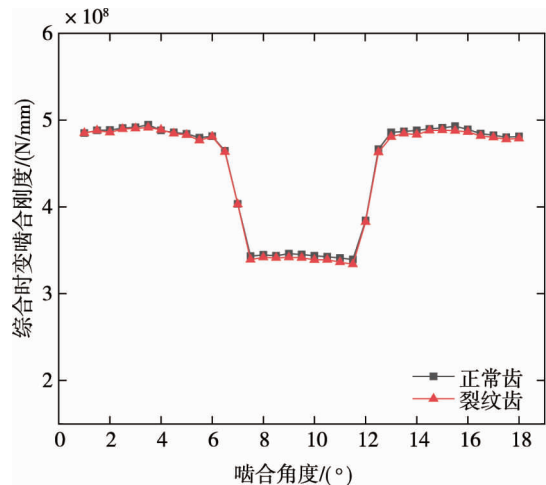


图8 有限元法含裂纹综合时变啮合刚度曲线

由图8可知:在植入裂纹后,有限元法计算得出的啮合刚度曲线有明显下降的趋势,且啮合位置在齿顶圆附近即啮出点位置时,啮合刚度的下降趋势较啮入位置时(齿根附近)更明显,且变化幅值区间为0.40%~1.07%,同时在齿轮单齿啮合区域内,含裂纹齿的啮合刚度下降幅度较多齿啮合区域内要大,且单齿啮合区域内,啮合刚度下降幅值区间为0.73%~1.75%.

3 石川法

3.1 石川法原理

石川公式是一种应用广泛的材料力学解析法,石川公式将轮齿简化为由一个梯形与矩形组成的悬臂梁,矩形的长为齿轮轮齿的危险截面,危险截面的确定方法一般有 Lewis 抛物线法、30°切线法等,石川公式中的危险截面采用的是 30°切线法.一个轮齿在载荷作用点沿啮合线方向的变形量 δ 可以表示为

$$\delta = \delta_{br} + \delta_{bt} + \delta_s + \delta_c.$$

式中: δ_{br} 为长方形部分的弯曲变形量; δ_{bt} 为梯形部分的变形量; δ_s 为剪切力产生的变形量; δ_c 为基础部

分倾斜产生的变形量.

当一对轮齿啮合时,还会由于接触而产生赫兹接触变形,各个轮齿在载荷作用点沿啮合线方向的变形量之和 δ_{Σ} 为

$$\delta_{\Sigma} = \delta_1 + \delta_2 + \delta_{pv}.$$

式中: δ_1, δ_2 分别为 2 个轮齿的变形量,详细计算参数含义见文献 [21-22]; δ_{pv} 为接触变形量.

石川法的简化模型见图 9,假设一对齿轮在分度圆节点上均匀接触时,其啮合刚度计算公式为

$$k_n = \frac{F_n}{\delta_{\Sigma}}.$$

式中: F_n 为法向啮合力.

3.2 案例分析

在忽略齿面几何误差的情况下,对不含裂纹的齿轮进行非线性啮合接触分析,以主动轮旋转角度为判断依据,绘制正常齿单个啮合周期内的综合时变啮合刚度曲线如图 10 所示.

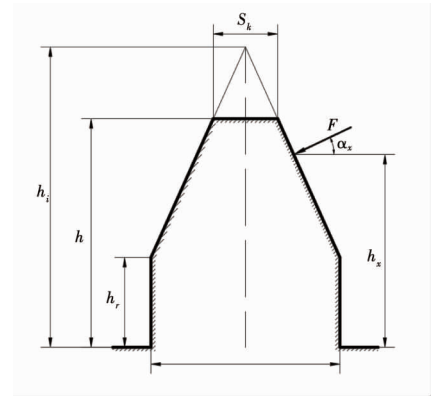


图 9 石川法简化模型

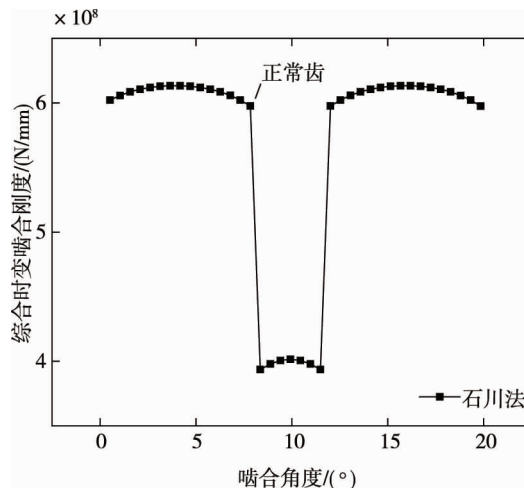


图 10 石川法正常齿综合时变啮合刚度曲线

4 对比分析

分别采用势能法、石川法和有限元法求 1.2 节中齿轮在转矩 $200 \text{ N} \cdot \text{m}$ 时的平均啮合刚度,并与 ISO 6336-1 法^[21] 计算所得的平均啮合刚度进行对比,以 ISO 6336-1 法所得结果为参考值进行相对误差分析,结果如表 1 所示.

表 1 平均啮合刚度计算结果对比

算法	平均啮合刚度/(N/mm)	相对误差/%
ISO 6336-1 法	3.93E+08	0.00
势能法	3.81E+08	3.21
石川法	3.98E+08	1.15
有限元法	3.47E+08	13.24

由表 1 可知:ISO 6336-1 法与势能法、石川法的结果较为接近.由于石川法、势能法和 ISO 6336-1 法均是在没有误差的一对齿相啮合时求得的刚度,ISO 6336-1 法的变形量为韦伯-班纳斯切克公式和石川公式计算的平值得到^[23],因此,ISO 6336-1 法得到的刚度值近似等于势能法和石川法得到的时变啮合刚度曲线变化的最大值,同时 ISO 6336-1 法的结果大致与综合时变啮合刚度 K_0 的平均值相等.

有限元法在分析过程中,在边界条件和网格精度满足时,其结果准确性高.有限元法分析过程中会考虑载荷在啮合过程中的动态变化和沿啮合线位置分布的非均匀变化,此时接触面上的力为沿接触线的分布力,这与实际工况中齿面接触形式更符合.同时,有限元法分析时会考虑齿轮轮毂的变形量和轮体偏转引起的位移量,能够更全面地考虑这部分变化引起的刚度效应,轮齿在实际接触过程中存在齿面摩擦力,有限元法能够更全面地考虑齿面接触过程中由于摩擦力等因素引起的非线性变化.以材料力学原理为基础的石川法和势能法,等效为悬臂梁的过程中使用很多近似以及部分刚体假设的影响,导致需要用弹性力学偏微分方程求解的问题简化成了用微分方程和代数方程求解,且无形中将非均匀分布载荷简化成了集中力和弯矩的影响,从而导致石川法和势能法的结果和实际结果误差大,也正因为如此,有限元法所考虑的刚度效应比石川法和势能法多,因此,综合时变啮合刚度数值较小,但结果更接近于实际工况结果.

在主动轮齿根圆与基圆附近植入相同贯穿式裂纹(裂纹深度 $q_0=0.5\text{ mm}$,裂纹初始倾角 $\alpha_c=33^\circ$),对势能法、石川法和有限元法计算所得到的时变刚度曲线进行对比,结果如图11所示,图11中啮合角在 $0^\circ\sim 8^\circ$ 和 $12.0^\circ\sim 19.8^\circ$ 区域属于双齿啮合区域,啮合角在 $8^\circ\sim 12^\circ$ 属于单齿啮合区域.

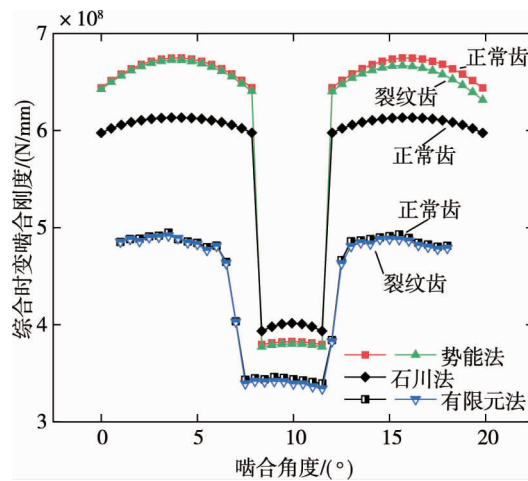


图11 综合时变啮合刚度曲线对比

由图11可知:势能法、石川法和有限元法在双齿啮合区域内的计算结果存在明显差异.势能法计算结果值最大,石川法次之,有限元法最小;势能法与石川法的计算结果呈现出先上升后下降的趋势,而有限元法的计算结果上升趋势呈现出区域稳定,无明显变化.单齿啮合区域内的计算结果差异相对变小,石川法的计算结果值最大,势能法次之,有限元法最小.当齿轮啮合点啮入啮出时,即位于主动轮齿顶圆位置处时,会由于齿顶位置处弹性性能较齿根圆处时较大,会导致接触点的变形量出现突变,从而啮合刚度在接近啮出点时出现突变.

有限元法单齿啮合区域的啮合时间略大于势能法与石川法,而多齿啮合区域的啮合时间略小于此2种方法.原因在于齿轮在真实接触过程中,啮合齿轮对之间产生的是非线性接触行为,在有限元法中,考虑了啮合点位处啮合力的非线性变化,而解析法中将法向啮合力考虑为线性变化.对于有限元法,在单齿啮合区域内处于高载荷接触区域,此时由于负载的增加使得啮合时间存在相对的延长,而在多齿啮合区域内处于低载荷区,这种由于载荷而出现的非线性变化规律会延长下一对啮合齿在高载荷下进入啮合的时间和前一对齿退出啮合的时间,但是在势能法与石川法中,由于将载荷变化考虑为线性变化规律,会忽略此效应,因此出现有限元法单、双齿的啮合时间与势能法、石川法的差异.

势能法与石川法计算所得的时变啮合刚度,在单齿啮合区域内有良好的一致性,而在多齿啮合区域内存在一定的相对误差,误差变化幅值在 $4\%\sim 5\%$.这是由于在解析法简化成为悬臂梁的过程中,势能法的计算齿廓采用的是理论齿廓,而石川法将齿根圆部分当量化为长方形,将齿顶圆至齿根圆部分当量化为梯形,这会导致石川法当量化成长方形部分的变形量要大于理论齿廓时引起的变形量,从而导致初始啮入时

刻(图 11 中的 $0^{\circ} \sim 8^{\circ}$ 范围)石川法所得的啮合刚度要小于势能法所求的啮合刚度.而石川法在进入当量化为梯形啮合区域内时,此时当量梯形与理论齿廓大小存在的误差较小(图 11 中的 $8^{\circ} \sim 12^{\circ}$ 范围),因此,单齿啮合区域内势能法的啮合刚度与石川法所求的啮合刚度存在较好的一致性.石川法在退出梯形啮合区域范围内时,此时当量化为梯形部分的变形量要大于理论轮廓引起的变形量,因此,会导致此区域内(图 11 中的 $12.0^{\circ} \sim 19.8^{\circ}$ 范围)的啮合刚度要小于势能法所求的啮合刚度.

当引入裂纹后,势能法与有限元法计算所得的裂纹状态啮合刚度均低于正常状态啮合刚度,这与现有文献中所叙述的结果一致^[9,11],而且在主动轮的裂纹齿退出啮合时,裂纹的刚度变化较大,与预期结果相符,因为在齿廓上,与基圆位置相比,齿顶圆位置处的弹性相对较大.势能法计算的裂纹状态与正常状态啮合刚度的变化幅值为 $0.21\% \sim 1.91\%$,而有限元的变化幅值为 $0.40\% \sim 1.07\%$.

从计算用时来看,有限元法的计算用时大大超过势能法与石川法.引入裂纹时,有限元法的计算时间为 30 min,而势能法与石川法计算时间约为 2 min,但是有限元法更能适用于多种复杂裂纹结构下的啮合刚度的计算.

5 结论

1)有限元法在计算时通常是最为真实和准确的结果,但是消耗的时间较长.当齿轮传动系统结构简单,且时变啮合刚度的精度为敏感值时,应该采用有限元法.同时当齿轮含有微小裂纹时,在满足足够网格密度的情况下,对啮合刚度的精度和数量级较为敏感且着重考虑不同裂纹类型参数(贯穿式或抛物线半贯穿式)对啮合刚度的敏感值时,可优先使用有限元法计算啮合刚度,当涉及分析复杂齿轮如锥齿轮、斜齿轮等情况时,在优先考虑数量级和精度的情况下,可以优先采用有限元法.

2)势能法和石川法由于其计算效率高,当前仍然是计算时变啮合刚度的重要方法.当啮合刚度涉及含有简单裂纹或多级齿轮传动,结构复杂的情况且忽略齿尖效应,在保证时变啮合刚度精度值的情况下,可以优先采用势能法进行计算.

3)石川法和势能法均属于材料力学范畴,但在计算过程中,石川法将齿轮当量化为矩形和梯形的组合,势能法则是根据齿轮实际齿廓线进行计算.对石川法而言,考虑齿根裂纹时,直齿轮齿根当量化为矩形部分的变形量会由于石川公式本身采用当量化思想的原因,实际齿廓线上的裂纹需要在矩形上重新进行当量化,此时石川公式中获取当量化后的裂纹表征公式要比势能法中采用实际齿廓线植入裂纹的公式难度要大很多,且误差会由于当量化过程中的简化而无形中增大,因此,很少有学者通过石川法计算含齿根裂纹的时变啮合刚度.

参考文献:

- [1] 王一.基于时变啮合刚度的齿轮传动系统动力学研究[D].沈阳:东北大学,2014.
- [2] 吴家腾,杨宇,程军圣.基于解析有限元的齿根裂纹时变啮合刚度计算方法[J].机械工程学报,2018,54(23):56-62.
- [3] 魏静,赖育彬,秦大同,等.齿廓修形斜齿轮副啮合刚度解析计算模型[J].振动与冲击,2018,37(10):94-101.
- [4] 蒋建政,陈再刚,翟婉明,等.基于不同啮合刚度计算模型的直齿圆柱齿轮传动系统动力学特性研究[J].中国科学:技术科学,2018,48(8):863-871.
- [5] Weber C, Banaschek K. Formänderung und Profilrücknahme bei Gerad- und Schrägverzahnten Stirnrädern[J]. Schriftenreihe Antriebstechnik 1953,11:4.
- [6] Yang D C H, Lin J Y. Hertzian damping, tooth friction and bending elasticity in gear impact dynamics[J]. Journal of mechanisms, transmissions, and automation in design, 1987, 109(2): 189-196.
- [7] Tian X. Dynamic simulation for system response of gearbox including localized gear faults[D]. Edmonton: University of Alberta, 2004.
- [8] Wu S, Zuo M J, Parey A. Simulation of spur gear dynamics and estimation of fault growth[J]. Journal of Sound and Vibration,

- 2008, 317(3/5): 608-624.
- [9] Chaari F, Fakhfakh T, Haddar M. Analytical modelling of spur gear tooth crack and influence on gear mesh stiffness[J]. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 2009, 28(3): 461-468.
- [10] Mohammed O D, Rantatalo M, Kumar U. Analytical crack propagation scenario for gear teeth and time-varying gear mesh stiffness[C]//International Conference on Applied Mechanics "World Academy of Science Engineering and Technology". 2012, 68: 1106-1111.
- [11] Chen Z, Shao Y. Dynamic simulation of spur gear with tooth root crack propagating along tooth width and crack depth[J]. *Engineering Failure Analysis*, 2011, 18(8): 2149-2164.
- [12] 张玲玉,徐颖强,许璠,等.含齿根裂纹的非标齿轮啮合刚度改进算法及动态响应分析[J].西北工业大学学报,2015,33(6):956-961.
- [13] 万志国,瞿艳阳,曹宏瑞,等.时变啮合刚度算法修正与齿根裂纹动力学建模[J].机械工程学报,2013,49(11): 153-160.
- [14] Ma H, Song R, Pang X, et al. Time-varying mesh stiffness calculation of cracked spur gears[J]. *Engineering Failure Analysis*, 2014, 44: 179-194.
- [15] Li Z, Ma H, Feng M, et al. Meshing characteristics of spur gear pair under different crack types[J]. *Engineering Failure Analysis*, 2017, 80: 123-140.
- [16] Huangfu Y, Chen K, Ma H, et al. Deformation and meshing stiffness analysis of cracked helical gear pairs[J]. *Engineering Failure Analysis*, 2019, 95: 30-46.
- [17] Howard I, Jia S, Wang J. The dynamic modelling of a spur gear in mesh including friction and a crack[J]. *Mechanical systems and signal processing*, 2001, 15(5): 831-853.
- [18] Wang J. Numerical and experimental analysis of spur gears in mesh[D]. Perth: Curtin University, 2003.
- [19] Ma H, Pang X, Feng R, et al. Fault features analysis of cracked gear considering the effects of the extended tooth contact[J]. *Engineering Failure Analysis*, 2015, 48: 105-120.
- [20] Zouari S, Maatar M, Fakhfakh T, et al. Three-dimensional analyses by finite element method of a spur gear: effect of cracks in the teeth foot on the mesh stiffness[J]. *Journal of failure analysis and prevention*, 2007, 7(6): 475-481.
- [21] 李茹贞,赵清慧.齿轮强度设计资料[M].北京:机械工业出版社,1984.
- [22] 李亚鹏,孙伟,魏静,等.齿轮时变啮合刚度改进计算方法[J].机械传动,2010,34(5):22-26.
- [23] International Organization for Standardization. Calculation of load capacity of spur and helical gears—Part 1: Basic principles, introduction and general influence factors: ISO 6336-1: 2019[S]. 2019.