

涂超,严兰兰,徐梦豪.3次 Bézier 曲线曲面的新扩展[J].湖南科技大学学报(自然科学版),2022,37(3):113-124. doi:10.13582/j.cnki.1672-9102.2022.03.015

TU C, YAN L L, XU M H. New Extension of Cubic Bézier Curves and Surfaces [J]. Journal of Hunan University of Science and Technology (Natural Science Edition), 2022, 37(3): 113-124. doi:10.13582/j.cnki.1672-9102.2022.03.015

三次 Bézier 曲线曲面的新扩展

涂超,严兰兰*,徐梦豪

(东华理工大学 理学院, 江西 南昌 330013)

摘要:通过将五次 Bernstein 基函数进行重新组合,构造由 4 个含单参数的多项式形成的调配函数,并由之定义结构与三次 Bézier 曲线曲面相同的新曲线曲面.新曲线不仅继承了 Bézier 曲线的一系列基本性质,而且在控制顶点给定的前提下,通过形状参数来调整曲线对控制多边形的逼近程度;更特别的是,在常规的 C^2 光滑拼接条件下,新曲线之间可以自动达到 $C^2 \cap FC^3$ 连续,在 G^2 光滑拼接条件下,可以自动达到 G^3 连续.为了使形状参数的选取有迹可循,给出使曲线弧长、曲率、曲率变化率近似最小时,参数的计算公式.新曲面具有与新曲线对应的诸多优点.

关键词:Bézier 曲线曲面; Bernstein 基函数; 形状参数; 光滑拼接; $C^2 \cap FC^3$ 连续; G^3 连续

中图分类号:TP391.72 **文献标志码:**A **文章编号:**1672-9102(2022)03-0113-12

New Extension of Cubic Bézier Curves and Surfaces

TU Chao, YAN Lanlan, XU Menghao

(College of Science, East China University of Technology, Nanchang 330013, China)

Abstract: By recombining the quintic Bernstein basis functions, a configuration function formed by four polynomials with one parameter is constructed, and a new surface with the same structure as the cubic Bézier curve and surface is defined. The new curve can not only inherit a series of basic properties of the Bézier curve, but also adjusts the degree of approximation of the curve to the control polygon through the shape parameters under the premise of the given control vertex. What's more, under the normal C^2 smooth connection conditions, the new curves can automatically reach $C^2 \cap FC^3$ continuity, while under the condition of G^2 smooth connection conditions, it can automatically reach G^3 continuity. In order to make the selection of the shape parameter traceable, the formulas for calculating the parameter are given to minimize the approximate arc length, curvature and rate of change of curvature. The new surface has many advantages corresponding to the new curve.

Keywords: Bézier curve and surface; Bernstein basis function; shape parameter; smooth joining; $C^2 \cap FC^3$ continuous; G^3 continuous

基于 Bernstein 基函数所具有的优良特性,由它所定义的 Bézier 曲线具有诸多优秀的性质,简单直观而又易于控制的优点使得 Bézier 曲线在工业设计上大放异彩.当然,这些优秀的特性并不能掩盖它的不足.对 Bézier 曲线而言,由其所构造的曲线形状主要取决于控制顶点的位置,若要调整形状,则只能改变相

收稿日期:2021-01-06

基金项目:国家自然科学基金资助项目(11761008);江西省自然科学基金资助项目(20161BAB211028);江西省教育厅科技项目资助(GJJ160558)

*通信作者, E-mail: 2808820108@qq.com

关控制顶点的位置,这无疑会加大计算的复杂度.另外,Bézier曲线所能表示的曲线范围有限,一些像圆锥曲线的线形无法精确表示,这就极大地限制了它的应用范围.除了这两者以外,Bézier曲线在拼接方面也存在着不足之处,要想获得足够光滑的拼接曲线,就必须针对控制点进行大量计算,这无疑会造成不便.目前,有大量学者围绕 Bézier 曲线的上述前 2 个不足展开研究.例如,文献[1-5]在 Bézier 方法的基础上给出扩展方法,不仅不会增加计算量,而且在保留 Bézier 方法优势的基础上,优化了曲线对控制多边形的逼近程度,并且给予了曲线自由调整形状的特性;文献[6]利用三次三角多项式构造的三角曲线不仅具有和二次 Bézier 曲线类似的优点,还有更加良好的逼近性质与连续性质.另外,作者还构造了具有良好特性,且在特殊情况下能达到 C^3 连续的三角样条;文献[7]中,作者基于三角全正基所构造的分段组合曲线,不仅拥有变差缩减(VD)性质和较好的连续性,同时也可以表示一些特殊线形;文献[8]在空间上构造具有 4 个形状参数的三角 Bernstein 基函数,通过该函数所构造的曲线在具备 Bézier 曲线的基本性质的同时,还能够构造椭圆等弧线.当然,也有文献同时针对 Bézier 曲线的上述前 2 个不足进行优化,如文献[9-10]基于三角函数空间构造含有 2 个形状参数基函数,由之定义的曲线不仅增强了曲线形状调整的灵活度,还扩大了曲线的形状表示范围.虽然针对 Bézier 曲线的上述前 2 点不足进行优化的成果有很多,但是鲜有文献针对 Bézier 曲线方法在拼接上的不足进行优化.

在文献[11]中,作者在三角函数空间上构造了 1 组含 2 个形状参数的调配函数,由其定义的曲线具有与五次 Bézier 曲线相同的结构,却能够更加逼近控制多边形,比一般 Bézier 曲线在形状调整上更具有灵活度.此外,该曲线在拼接上有一个明显的优势,在普通 Bézier 曲线的拼接条件中,对连续阶的要求越高,涉及的控制顶点数量越多,而该曲线却可以在与普通 Bézier 曲线类似的 C^2 光滑拼接条件下,自动达到 $C^2 \cap FC^3$ 连续.在实际应用中, $C^2 \cap FC^3$ 连续是一个比较合理的光滑度,可以满足大多数的应用要求.因此,该曲线可以在相对简单的条件下达到预期的光滑度,这给实际应用带来了极大的便利.

注意到文献[11]中的调配函数构造于三角函数空间,相较于多项式空间,其计算量有所增加,但由其定义的曲线却无法表示圆锥曲线.此外,考虑到三次 Bézier 曲线在实际应用中最为广泛.因此,直接在代数多项式空间上构造调配函数,目标是由其定义的与三次 Bézier 曲线结构相同的新曲线,既具有经典 Bézier 曲线的优势又拥有文献[11]中曲线的优点,即既改进了 Bézier 曲线在形状调整上的灵活度,使之能够在不改变控制顶点的条件下灵活调整曲线形状,又优化了拼接条件,使之可以在只涉及相对较少控制顶点的情况下,达到满足大多数实际应用需求的光滑度.

1 调配函数及其性质

为了构造与三次 Bézier 曲线结构相同、性质相似,但又能在常规 C^2 光滑拼接条件下自动实现 $C^2 \cap FC^3$ 光滑拼接的新曲线,通过对构成 5 次 Bernstein 基函数的 6 个函数进行重新分配、组合,得到 1 组由 4 个函数形成的函数组.

定义 1 式(1)中 4 个关于 t 的函数为带参数 α 的准三次 Bézier 曲线的调配函数,简称 α 函数,即

$$\begin{cases} b_0(t) = (1-t)^5 + 5(1-\alpha)(1-t)^4t; \\ b_1(t) = 5\alpha(1-t)^4t + 5(1-t)^2t^2; \\ b_2(t) = 5(1-t)^2t^2 + 5\alpha(1-t)t^4; \\ b_3(t) = 5(1-\alpha)(1-t)t^4 + t^5. \end{cases} \quad (1)$$

式中:自变量 $t \in [0, 1]$; 参数 $\alpha \in [0, 1]$.

记五次 Bernstein 基函数为 $B_i^5(t) = C_5^i(1-t)^{5-i}t^i$, 其中 $i = 0, 1, \dots, 5, t \in [0, 1]$, 则 α 函数可以表示为

$$\begin{cases} b_0(t) = B_0^5(t) + (1-\alpha)B_1^5(t); \\ b_1(t) = \alpha B_1^5(t) + \frac{1}{2}B_2^5(t) - \frac{1}{2}B_3^5(t); \\ b_2(t) = \frac{1}{2}B_2^5(t) + \frac{1}{2}B_3^5(t) + \alpha B_4^5(t); \\ b_3(t) = (1-\alpha)B_4^5(t) + B_5^5(t); \end{cases} \quad (2)$$

另外, α 函数可以用幂基表示为

$$\begin{cases} b_0(t) = 1 - 5\alpha t + 10(2\alpha - 1)t^2 + 10(2 - 3\alpha)t^3 + 5(4\alpha - 3)t^4 + (4 - 5\alpha)t^5; \\ b_1(t) = 5\alpha t + 5(1 - 4\alpha)t^2 + 10(3\alpha - 1)t^3 + 5(1 - 4\alpha)t^4 + 5\alpha t^5; \\ b_2(t) = 5t^2 - 10t^3 + 5(1 + \alpha)t^4 - 5\alpha t^5; \\ b_3(t) = 5(1 - \alpha)t^4 + (5\alpha - 4)t^5. \end{cases} \quad (3)$$

下面给出 α 函数的性质.

1) 规范性: $\sum_{i=0}^3 b_i(t) = 1.$

2) 非负性:对 $t \in [0,1],$ 当 $\alpha \in [0,1]$ 时,有 $b_i(t) \geq 0,$ 这里 $i = 0,1,2,3.$

3) 对称性: $b_i(t) = b_{3-i}(1 - t), i = 0,1,2,3.$

4) 端点性质:在端点处的函数值以及从一阶到三阶的导数值.

$$\begin{cases} b_0(0) = 1, b_1(0) = b_2(0) = b_3(0) = 0; \\ b_0(1) = b_1(1) = b_2(1) = 0, b_3(1) = 1. \\ b'_0(0) = -5\alpha, b'_1(0) = 5\alpha, b'_2(0) = b'_3(0) = 0; \\ b'_0(1) = b'_1(1) = 0, b'_2(1) = -5\alpha, b'_3(1) = 5\alpha. \\ b''_0(0) = 20(2\alpha - 1), b''_1(0) = 10(1 - 4\alpha), b''_2(0) = 10, b''_3(0) = 0; \\ b''_0(1) = 0, b''_1(1) = 10, b''_2(1) = 10(1 - 4\alpha), b''_3(1) = 20(2\alpha - 1). \\ b'''_0(0) = 60(2 - 3\alpha), b'''_1(0) = 60(3\alpha - 1), b'''_2(0) = -60, b'''_3(0) = 0; \\ b'''_0(1) = 0, b'''_1(1) = 60, b'''_2(1) = 60(1 - 3\alpha), b'''_3(1) = 60(3\alpha - 2). \end{cases}$$

证明:由 α 函数与五次 Bernstein 基函数之间的关系(即式(2)),以及 Bernstein 基函数的规范性、非负性、对称性,易知 α 函数同样具备这些性质.由 α 函数与幂基之间的关系(即式(3))经过简单推导即可得到端点性质.

图1为取不同参数 α 时所对应 α 函数的图形.其中当 α 取0时,函数 $b_1(t)$ 与 $b_2(t)$ 的图形重合.由图1可以看出:函数 $b_1(t)$ 与 $b_2(t)$ 的图形都是单峰曲线;函数 $b_1(t)$ 与 $b_2(t)$ 关于 t 都是先递增后递减;随着参数 α 的减小,使函数 $b_1(t)$ 和 $b_2(t)$ 取最大值的 t 的坐标会逐渐向 $t = 0.5$ 的位置靠拢,并且这2个函数的最大值在不断减小,直至 $\alpha = 0$ 且 $t = 0.5$ 时,这2个函数的最大值同时达到最小;函数 $b_0(t)$ 关于 t 单调递减;函数 $b_3(t)$ 关于 t 单调递增;函数 $b_0(t)$ 与 $b_3(t)$ 图形的“坡度”随着参数 α 的减小在不断增加.

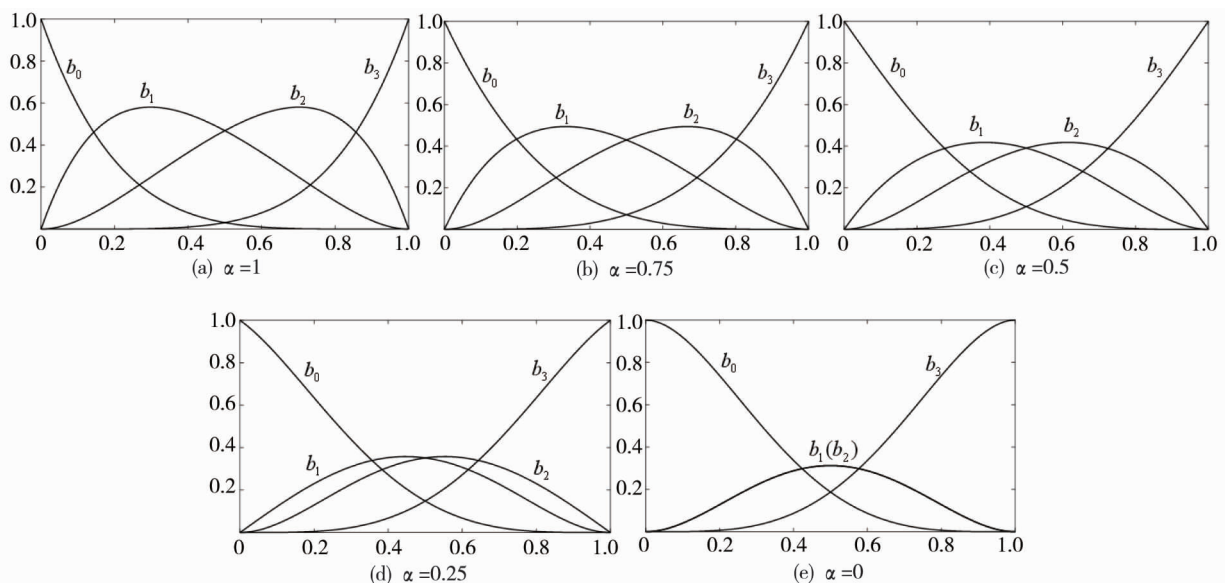


图1 取不同参数时的 α 函数

2 扩展曲线

2.1 曲线及其性质

定义 2 给定 4 个控制顶点 $P_i (i = 0, 1, 2, 3)$, 与 α 函数做线性组合, 即可定义一段结构与三次 Bézier 曲线相同的新曲线, 即

$$r(t) = \sum_{i=0}^3 P_i b_i(t), \quad t \in [0, 1]. \quad (4)$$

式中: $b_i(t)$ 为 α 函数. 为了方便, 称由式(4)定义的 $r(t)$ 为扩展曲线.

下面给出扩展曲线的性质.

1) 凸包性: 由 α 函数的非负性与规范性可知, 扩展曲线 $r(t)$ 必定位于由其控制顶点所形成的凸包内部.

2) 对称性: 由 α 函数的对称性可知, 控制顶点 $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ 和 $\{P_3, P_2, P_1, P_0\}$ 确定了形状相同的扩展曲线, 但是两条曲线的方向相反.

3) 几何不变性与仿射不变性: 由 α 函数的规范性可知, 扩展曲线的形状和位置不依赖于坐标系的选择, 只与控制顶点和参数 α 的取值有关; 欲获得经仿射变换后的扩展曲线, 只需对控制多边形执行相同的仿射变换.

4) 端点性质: 由 α 函数的端点性质, 以及扩展曲线的表达式, 可得

$$\begin{cases} r(0) = P_0; \\ r(1) = P_3. \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} r'(0) = 5\alpha(P_1 - P_0); \\ r'(1) = 5\alpha(P_3 - P_2). \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} r''(0) = 10[(4\alpha - 1)(P_0 - P_1) + P_2 - P_0]; \\ r''(1) = 10[(4\alpha - 1)(P_3 - P_2) + P_1 - P_3]. \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} r'''(0) = 60[(3\alpha - 1)(P_1 - P_0) + P_0 - P_2]; \\ r'''(1) = 60[(3\alpha - 1)(P_3 - P_2) + P_1 - P_3]. \end{cases} \quad (8)$$

5) 端点插值性与端边相切性: 由式(5)可知, 扩展曲线的起止点即为控制多边形的首末端点 P_0 和 P_3 ; 综合式(5)和式(6)可知, 扩展曲线与控制多边形相切于边 P_0P_1 的初始点 P_0 和边 P_2P_3 的末端点 P_3 .

6) 变差缩减性(VD 性质): 任一直线(或平面)与扩展曲线 $r(t)$ 的交点个数不超过该直线(或平面)与其控制多边形的交点个数, 囊括整个控制多边形的平面除外.

证明: 根据文献[5], 在证明扩展曲线的 VD 性质之前, 需先证明其调配函数在 $(0, 1)$ 内满足笛卡尔符号法则. 假设有常数序列 $\{c_i\} (i = 0, 1, 2, 3)$, 需证明函数 $f(t) = \sum_{i=0}^3 c_i b_i(t)$ 在区间 $(0, 1)$ 内根的个数不超过序列 $\{c_i\}$ 中符号的改变次数, 即

$$\text{Zeros}(0, 1) \{f(t)\} \leq \text{SA}(c_i), \quad i = 0, 1, 2, 3.$$

式中: $\text{Zeros}(0, 1) \{f(t)\}$ 为根的个数; $\text{SA}(c_i)$ 为符号改变次数.

在此, 假设 $c_0 > 0$, 则 $\text{SA}(c_i)$ 可能为 3, 2, 1, 0. 当 $\text{SA}(c_i)$ 为 3 时, $c_3 < 0$. 因 $f(t)$ 在区间 $[0, 1]$ 内是连续的, 所以 $f(0) = c_0, f(1) = c_3$. 若 $f(t)$ 在 $(0, 1)$ 上有 4 个根, 则 $f(1) = c_3 > 0$, 该结果与假设矛盾, 不等式成立; 当 $\text{SA}(c_i)$ 为 2 或 1 时, 同理可证; 当 $\text{SA}(c_i)$ 为 0 时, 不等式显然成立. 因此, 函数 $f(t)$ 在区间 $(0, 1)$ 内满足笛卡尔符号法则.

设直线 M (或平面) 经过点 P , 并且法向量为 u . 若 M 与控制多边形 $\langle P_0P_1P_2P_3 \rangle$ 相交于边 $P_iP_{i+1} (i = 0, 1, 2)$, 则控制顶点 P_i 和 P_{i+1} 分别处于 M 两侧, 而向量 $u \cdot (P_i - Q)$ 和 $u \cdot (P_{i+1} - Q)$ 符号一定相反. 由于 $\text{SA}\{u \cdot (P_i - Q) (i = 0, 1, 2, 3)\}$ 不超过 $\langle P_0P_1P_2P_3 \rangle$ 与 M 交点的个数, 且扩展曲线与 M 的交点个数等于

$\text{Zeros}(0,1) \left\{ \sum_{i=0}^3 b_i(t) (\mathbf{P}_i - \mathbf{Q}) \cdot \mathbf{u} \right\}$, 根据调配函数的笛卡尔符号法则,可知扩展曲线 $\mathbf{r}(t)$ 与 M 的交点个数小于或等于 $\text{SA}\{\mathbf{u} \cdot (\mathbf{P}_i - \mathbf{Q}) (i = 0, 1, 2, 3)\}$. 证毕.

7) 形状可调性:即使固定控制顶点,亦可通过改变参数 α 的取值来调整扩展曲线的形状.

如图 2 所示,在固定控制顶点的情况下,取不同 α 值时所得到的扩展曲线,由上至下扩展曲线中 α 依次取 1.00, 0.75, 0.50, 0.25, 0. 显然,随着 α 取值的增大,扩展曲线会越来越接近控制多边形.图 3 中展示了取 $\alpha = 1$ 的扩展曲线(曲线 1)与传统三次 Bézier 曲线(曲线 3),以及文献[4]中 C^2 拟 3 次 Bézier 样条曲线(曲线 2)的对比,可以看出扩展曲线比其他 2 种曲线更逼近控制多边形.

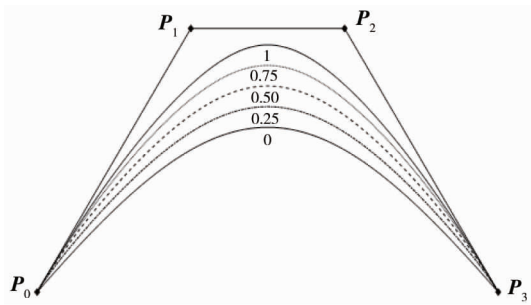


图 2 取不同 α 值的扩展曲线

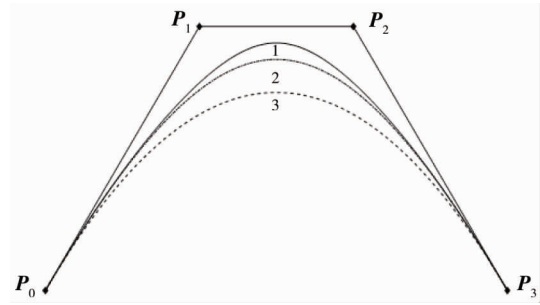


图 3 扩展曲线与其他曲线的对比

2.2 曲线的形状控制

对于定义 2 中的扩展曲线,将其对参数 α 进行求导,得到

$$\frac{\partial \mathbf{r}(t)}{\partial \alpha} = 5(1-t)t[(1-t)^3(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0) + t^3(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_3)] \quad (9)$$

式(9)表明 $\frac{\partial \mathbf{r}(t)}{\partial \alpha}$ 与 α 的取值无关.对于给定的变量 $t^* \in (0, 1)$ 和固定的控制顶点 $\mathbf{P}_i (i = 0, 1, 2, 3)$, 随着参数 α 取值的改变,扩展曲线上相应的点 $\mathbf{r}(t^*)$ 将沿着由式(9)确定的固定方向线性移动.当 $t^* \in (0, \frac{1}{2})$ 时,由于 $(1-t)^3 > t^3$, 固定方向偏向向量 $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ 的方向;当 $t^* \in (\frac{1}{2}, 1)$ 时,由于 $t^3 > (1-t)^3$, 固定方向偏向向量 $\mathbf{P}_3\mathbf{P}_2$ 的方向;当 $t^* = \frac{1}{2}$ 时,由于 $(1-t)^3 = t^3$, 固定方向即以向量 $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ 与 $\mathbf{P}_3\mathbf{P}_2$ 为邻边(将向量 $\mathbf{P}_3\mathbf{P}_2$ 平移,使点 \mathbf{P}_3 与 \mathbf{P}_0 重合)所形成的平行四边形的对角线方向.在 t^* 从 0 到 1 增大的过程中,固定方向从偏向 $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ 的方向逐渐过渡到偏向 $\mathbf{P}_3\mathbf{P}_2$ 的方向.图 4 展示了参数 α 的取值改变时,扩展曲线上对应相同变量的点的变化趋势.其中 t^* 的取值在 5 条曲线中都为 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9, 其中最左侧取 0.1, 然后按照由左到右的顺序增大至 0.9;曲线 1~曲线 5 分别代表 α 取 1.00, 0.75, 0.50, 0.25, 0.

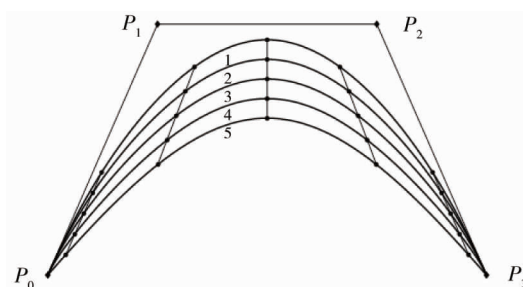


图 4 扩展曲线上对应相同变量的点随 α 取值改变的变化趋势

2.3 曲线的拼接

为了构造能够表示复杂形状的曲线,会将多条曲线段拼接在一起.但是对于 Bézier 型的曲线而言,单纯地将前一段的最后 1 个控制顶点与后一段的第 1 个控制顶点重合的这种方式生成的组合曲线只能满足

位置连续的条件,结果往往并不光滑,因此,并不能满足实际需求.为了构造能够达到实际应用要求的组合曲线,下面先讨论2条扩展曲线拼接时达到 C^1 和 C^2 连续的条件.

设有2条扩展曲线

$$\begin{cases} \mathbf{r}_1(t; \alpha_1) = \sum_{i=0}^3 \mathbf{P}_i b_i(t; \alpha_1); \\ \mathbf{r}_2(t; \alpha_2) = \sum_{i=0}^3 \mathbf{Q}_i b_i(t; \alpha_2). \end{cases}$$

式中: $b_i(t; \alpha_1)$ 和 $b_i(t; \alpha_2)$ 为取参数 α 为 α_1 和 α_2 的 α 函数,并且 $0 \leq \alpha_1, \alpha_2 \leq 1$.

取节点 $u_1 < u_2 < u_3$,设由 $\mathbf{r}_1(t; \alpha_1)$ 和 $\mathbf{r}_2(t; \alpha_2)$ 构造而成的组合扩展曲线为

$$\mathbf{R}(u) = \begin{cases} \mathbf{r}_1\left(\frac{u - u_1}{h_1}; \alpha_1\right), u \in [u_1, u_2]; \\ \mathbf{r}_2\left(\frac{u - u_2}{h_2}; \alpha_2\right), u \in [u_2, u_3]. \end{cases} \quad (10)$$

式中: $h_i = u_{i+1} - u_i, i = 1, 2$. 经过计算可以得到下面的结论.

定理1 对任意 $\alpha_i \in [0, 1], i = 1, 2$, 当条件

$$\begin{cases} \mathbf{Q}_0 = \mathbf{P}_3; \\ \mathbf{Q}_1 = \mathbf{P}_3 + \frac{\alpha_1 h_2}{\alpha_2 h_1} (\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2). \end{cases} \quad (11)$$

满足时,组合扩展曲线 $\mathbf{R}(u)$ 在节点 u_2 处 C^1 连续.

证明:由式(10)以及扩展曲线端点性质中的式(5)和式(6),可以算出

$$\begin{cases} \mathbf{R}(u_2^-) = \mathbf{P}_3; \\ \mathbf{R}(u_2^+) = \mathbf{Q}_0; \\ \mathbf{R}'(u_2^-) = \frac{5\alpha_1}{h_1} (\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2); \\ \mathbf{R}'(u_2^+) = \frac{5\alpha_2}{h_2} (\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_0). \end{cases} \quad (12)$$

当式(11)满足时,有 $\mathbf{R}(u_2^-) = \mathbf{R}(u_2^+), \mathbf{R}'(u_2^-) = \mathbf{R}'(u_2^+)$,表明组合扩展曲线 $\mathbf{R}(u)$ 在节点 u_2 处 C^1 连续.得证.

定理2 对任意 $\alpha_i \in [0, 1], i = 1, 2$, 在式(11)已经满足的前提下,若还满足条件

$$\mathbf{Q}_2 = \mathbf{P}_3 + \left[\frac{h_2^2(4\alpha_1 - 1)}{h_1^2} + \frac{\alpha_1 h_2(4\alpha_2 - 1)}{\alpha_2 h_1} \right] (\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2) + \frac{h_2^2}{h_1^2} (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_3). \quad (13)$$

则扩展曲线 $\mathbf{R}(u)$ 在节点 u_2 处 C^2 连续.

证明:由式(10)以及扩展曲线端点性质中的式(7),可以得出

$$\begin{cases} \mathbf{R}''(u_2^-) = \frac{10}{h_1^2} [(4\alpha_1 - 1)(\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2) + \mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_3]; \\ \mathbf{R}''(u_2^+) = \frac{10}{h_2^2} [(4\alpha_2 - 1)(\mathbf{Q}_0 - \mathbf{Q}_1) + \mathbf{Q}_2 - \mathbf{Q}_0]. \end{cases} \quad (14)$$

当式(11)和式(13)同时成立时,有 $\mathbf{R}(u_2^-) = \mathbf{R}(u_2^+), \mathbf{R}'(u_2^-) = \mathbf{R}'(u_2^+), \mathbf{R}''(u_2^-) = \mathbf{R}''(u_2^+)$,表明组合扩展曲线 $\mathbf{R}(u)$ 在节点 u_2 处 C^2 连续.得证.

文献[12]指出,对于实际的应用而言, $C^2 \cap FC^3$ 连续是一个比较合理的光滑性质.曲线 $\mathbf{R}(u)$ 在节点 u_2 处 FC^3 连续,当且仅当

$$\begin{pmatrix} \mathbf{R}(u_2^+) \\ \mathbf{R}'(u_2^+) \\ \mathbf{R}''(u_2^+) \\ \mathbf{R}'''(u_2^+) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \omega_{21} & \omega_{11}^2 & 0 \\ 0 & \omega_{31} & \omega_{32} & \omega_{11}^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{R}(u_2^-) \\ \mathbf{R}'(u_2^-) \\ \mathbf{R}''(u_2^-) \\ \mathbf{R}'''(u_2^-) \end{pmatrix}.$$

式中: $\omega_{11} > 0$.

定理 3 当式(11)和式(13)同时成立时,组合扩展曲线 $\mathbf{R}(u)$ 在节点 u_2 处 $C^2 \cap FC^3$ 连续.

证明:由定理(2)可知,当式(11)和式(13)成立时, $\mathbf{R}(u)$ 在节点 u_2 处 C^2 连续.又根据式(10)以及曲线端点性质中的式(8),我们可以推出

$$\begin{cases} \mathbf{R}'''(u_2^-) = \frac{1}{h_1^3} [b_1'''(1)\mathbf{P}_1 + b_2'''(1)\mathbf{P}_2 + b_3'''(1)\mathbf{P}_3]; \\ \mathbf{R}'''(u_2^+) = \frac{1}{h_2^3} [b_0'''(0)\mathbf{Q}_0 + b_1'''(0)\mathbf{Q}_1 + b_2'''(0)\mathbf{Q}_2]. \end{cases} \quad (15)$$

由于

$$\begin{cases} b_0'''(0) + b_1'''(0) + b_2'''(0) = 0; \\ b_1'''(1) + b_2'''(1) + b_3'''(1) = 0. \end{cases} \quad (16)$$

将式(16)经过变换代入式(15)后,可得

$$\begin{cases} \mathbf{R}'''(u_2^-) = \frac{1}{h_1^3} [b_1'''(1)(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_3) + b_2'''(1)(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_3)]; \\ \mathbf{R}'''(u_2^+) = \frac{1}{h_2^3} [b_1'''(0)(\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_0) + b_2'''(0)(\mathbf{Q}_2 - \mathbf{Q}_0)]. \end{cases} \quad (17)$$

因 u_2^- 与 u_2^+ 皆可视在节点 u_2 处,通过对式(12)和式(14)的整理,得到

$$\begin{cases} \mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2 = \frac{h_1}{5\alpha_1} \mathbf{R}'(u_2); \\ \mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_3 = \frac{h_1^2}{10} \mathbf{R}''(u_2) - (4\alpha_1 - 1) \frac{h_1}{5\alpha_1} \mathbf{R}'(u_2). \end{cases} \quad (18)$$

$$\begin{cases} \mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_0 = \frac{h_2}{5\alpha_2} \mathbf{R}'(u_2); \\ \mathbf{Q}_2 - \mathbf{Q}_0 = \frac{h_2^2}{10} \mathbf{R}''(u_2) + (4\alpha_2 - 1) \frac{h_2}{5\alpha_2} \mathbf{R}'(u_2). \end{cases} \quad (19)$$

将式(18)和式(19)代入式(17),并将其化简得

$$\begin{cases} \mathbf{R}'''(u_2^-) = \frac{1}{h_1^3} \left\{ b_1'''(1) \frac{h_1^2}{10} \mathbf{R}''(u_2) - \left[b_1'''(1) \frac{(4\alpha_1 - 1)h_1}{5\alpha_1} + b_2'''(1) \frac{h_1}{5\alpha_1} \right] \mathbf{R}'(u_2) \right\}; \\ \mathbf{R}'''(u_2^+) = \frac{1}{h_2^3} \left\{ b_2'''(0) \frac{h_2^2}{10} \mathbf{R}''(u_2) + \left[b_2'''(0) \frac{(4\alpha_2 - 1)h_2}{5\alpha_2} + b_1'''(0) \frac{h_2}{5\alpha_2} \right] \mathbf{R}'(u_2) \right\}. \end{cases} \quad (20)$$

再将式(20)中2个方程做减法,有

$$\begin{aligned} \mathbf{R}'''(u_2^+) - \mathbf{R}'''(u_2^-) &= \left[b_2'''(0) \frac{1}{10h_2} - b_1'''(1) \frac{1}{10h_1} \right] \mathbf{R}''(u_2) + \\ &\left\{ \left[b_1'''(0) \frac{1}{5\alpha_2 h_2^2} + b_2'''(0) \frac{4\alpha_2 - 1}{5\alpha_2 h_2^2} \right] + \left[b_1'''(1) \frac{4\alpha_1 - 1}{5\alpha_1 h_1^2} + b_2'''(1) \frac{1}{5\alpha_1 h_1^2} \right] \right\} \mathbf{R}'(u_2). \end{aligned}$$

这表明在 C^2 光滑拼接条件下,组合扩展曲线自动达到 $C^2 \cap FC^3$ 连续.

图5和图6展示了扩展曲线的拼接情况.图5中,2段实线中的参数 $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$,虚线中的参数 $\alpha_2 =$

0.75, 相邻 2 条曲线段的控制顶点之间仅满足定理 1 中的条件(11), 组合扩展曲线在拼接点处 C^1 连续. 图 6 中, 2 段实线中的参数 $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, 虚线中的参数 $\alpha_2 = 0.5$, 相邻 2 条曲线段的控制顶点之间既满足定理 1 中的条件(11), 又满足定理 2 中的条件(13), 组合扩展曲线在拼接点处 $C^2 \cap FC^3$ 连续.

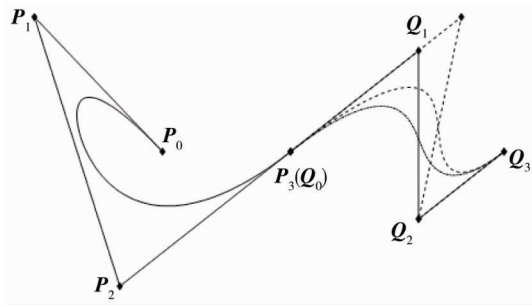


图 5 C^1 连续的组合扩展曲线

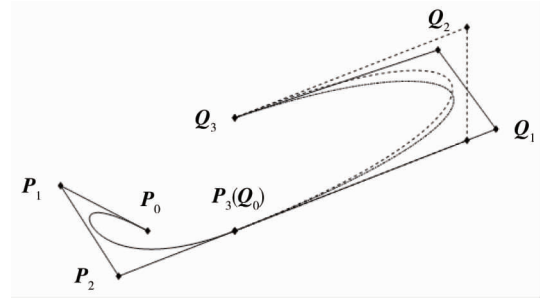


图 6 $C^2 \cap FC^3$ 连续的组合扩展曲线

上述连续条件皆为参数连续, 下面进一步讨论曲线的 G^1 至 G^3 连续条件.

针对曲线的三阶几何连续条件

$$\begin{pmatrix} \mathbf{R}(u_2^+) \\ \mathbf{R}'(u_2^+) \\ \mathbf{R}''(u_2^+) \\ \mathbf{R}'''(u_2^+) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & \beta_1^2 & 0 \\ 0 & \beta_3 & 3\beta_1\beta_2 & \beta_1^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{R}(u_2^-) \\ \mathbf{R}'(u_2^-) \\ \mathbf{R}''(u_2^-) \\ \mathbf{R}'''(u_2^-) \end{pmatrix}, \beta_1 > 0. \quad (21)$$

有以下 3 条定理.

定理 4 对任意 $\alpha_i \in [0, 1], i = 1, 2$, 当条件

$$\begin{cases} \mathbf{Q}_0 = \mathbf{P}_3; \\ \mathbf{Q}_1 = \mathbf{P}_3 + \frac{\beta_1 \alpha_1 h_2}{\alpha_2 h_1} (\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2). \end{cases} \quad (22)$$

成立且 $\beta_1 > 0$ 时, 组合曲线在节点 u_2 处 G^1 连续.

证明: 要使组合曲线在节点处 G^1 连续, 两段扩展曲线在拼接处必须端点重合, 且一阶切矢必须同向. 根据式(12), 当式(22)满足时, 有 $\mathbf{R}(u_2^+) = \mathbf{R}(u_2^-), \mathbf{R}'(u_2^+) = \beta_1 \mathbf{R}'(u_2^-)$, 表明组合曲线在节点 u_2 处 G^1 连续.

定理 5 对任意 $\alpha_i \in [0, 1], i = 1, 2$, 在式(22)满足的前提下, 若还满足条件

$$\mathbf{Q}_2 = \mathbf{P}_3 + \left[\frac{\beta_1 \alpha_1 (4\alpha_2 - 1) h_2}{\alpha_2 h_1} + \frac{\beta_2 \alpha_1 h_2^2}{2h_1} + \frac{\beta_1^2 (4\alpha_1 - 1) h_2^2}{h_1^2} \right] (\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2) + \frac{\beta_1^2 h_2^2}{h_1^2} (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_3). \quad (23)$$

则组合曲线在节点 u_2 处 G^2 连续.

证明: 结合式(14)可知, 当式(22)和式(23)同时满足时, 有 $\mathbf{R}(u_2^+) = \mathbf{R}(u_2^-), \mathbf{R}'(u_2^+) = \beta_1 \mathbf{R}'(u_2^-), \mathbf{R}''(u_2^+) = \beta_2 \mathbf{R}''(u_2^-) + \beta_1^2 \mathbf{R}''(u_2^-)$, 表明组合曲线在节点 u_2 处 G^2 连续.

定理 6 在式(22)和式(23)成立的前提下, 取

$$\begin{cases} \beta_1 > 0; \\ \beta_2 = -2\beta_1 \left(\frac{\beta_1}{h_1} + \frac{1}{h_2} \right); \\ \beta_3 = \frac{12\beta_1^2}{h_1} \left(\frac{\beta_1}{h_1} + \frac{1}{h_2} \right). \end{cases}$$

则组合曲线在节点 u_2 处 G^3 连续.

证明: 结合式(8)与式(10), 并将式(18)和式(19)代入其中, 有

$$\begin{aligned} \mathbf{R}'''(u_2^+) &= \frac{60}{h_2^3}(3\alpha_2 - 1)(\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_0) + \frac{60}{h_2^3}(\mathbf{Q}_0 - \mathbf{Q}_2) = \frac{12(3\alpha_2 - 1)}{\alpha_2 h_2^2} \mathbf{R}'(u_2^+) - \frac{6}{h_2} \mathbf{R}''(u_2^+) - \\ &\frac{12(4\alpha_2 - 1)}{\alpha_2 h_2^2} \mathbf{R}'(u_2^+) = -\left(\frac{12\beta_1}{h_2^2} + \frac{6\beta_2}{h_2}\right) \mathbf{R}'(u_2^-) - \frac{6\beta_1^2}{h_2} \mathbf{R}''(u_2^-). \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}'''(u_2^-) &= \frac{60}{h_1^3}(3\alpha_1 - 1)(\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2) + \frac{60}{h_1^3}(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_3) = \frac{12(3\alpha_1 - 1)}{\alpha_1 h_1^2} \mathbf{R}'(u_2^-) - \frac{6}{h_1} \mathbf{R}''(u_2^-) - \\ &\frac{12(4\alpha_1 - 1)}{\alpha_1 h_1^2} \mathbf{R}'(u_2^-) = -\frac{12}{h_1^2} \mathbf{R}'(u_2^-) + \frac{6}{h_1} \mathbf{R}''(u_2^-). \end{aligned} \quad (25)$$

将等式(25)左右两侧分别乘上 β_1^3 , 有

$$\beta_1^3 \mathbf{R}'''(u_2^-) = -\frac{12\beta_1^3}{h_1^2} \mathbf{R}'(u_2^-) + \frac{6\beta_1^3}{h_1} \mathbf{R}''(u_2^-). \quad (26)$$

用式(24)减去式(26), 有

$$\mathbf{R}'''(u_2^+) - \beta_1^3 \mathbf{R}'''(u_2^-) = \left(\frac{12\beta_1^3}{h_1^2} - \frac{12\beta_1}{h_2^2} - \frac{6\beta_2}{h_2}\right) \mathbf{R}'(u_2^-) - \left(\frac{6\beta_1^3}{h_1} + \frac{6\beta_1^2}{h_2}\right) \mathbf{R}''(u_2^-). \quad (27)$$

当式(24)满足时, 式(27)可以改写为

$$\mathbf{R}'''(u_2^+) - \beta_1^3 \mathbf{R}'''(u_2^-) = \beta_3 \mathbf{R}'(u_2^-) + 3\beta_1 \beta_2 \mathbf{R}''(u_2^-).$$

表明组合曲线在节点处 G^3 连续.

图7为 G^1 连续的组合扩展曲线. $\beta_1 = 0.7$ 的情况下, 2段实线中的参数 $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, 虚线中参数 $\alpha_2 = 1$, 组合扩展曲线在节点 u_2 处仅满足式(22). 图8为 G^3 连续的组合扩展曲线. $\beta_1 = 0.5, \beta_2 = -1.5, \beta_3 = 4.5$ 的情况下, 2段实线的参数 $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, 虚线的参数 $\alpha_2 = 1$, 图8中的组合扩展曲线在节点 u_2 处同时满足式(22)和式(23).

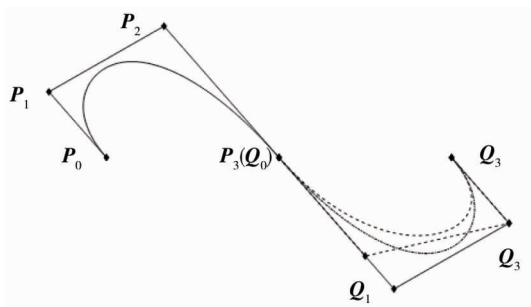


图7 G^1 连续的组合扩展曲线

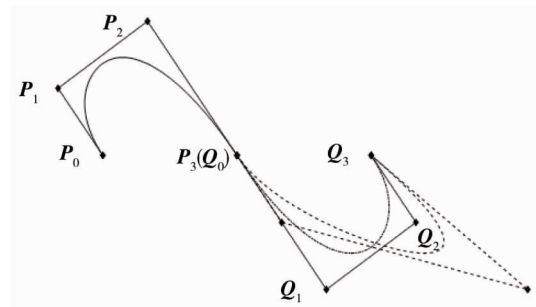


图8 G^3 连续的组合扩展曲线

2.4 曲线参数的选取

形状参数的引入为曲线的形状调整提供了便利, 为了使构造的曲线具备实际应用中要求的性质, 可以根据具体要求来确定相应的参数值. 文献[13]中介绍的能量函数:

$$E_k = \int_0^1 |\mathbf{r}^{(k)}(t)|^2 dt, k = 1, 2, 3. \quad (28)$$

式中: k 的不同取值使得 E_k 具有不同的意义, k 取1时表示近似弧长 (E_1), k 取2时表示近似曲率 (E_2), k 取3时表示近似曲率变化率 (E_3). 下面推导使 $E_k (k = 1, 2, 3)$ 取得最小值时, 对应的 α 值的计算公式.

结合式(2)和式(4)化简, 可以推得

$$\mathbf{r}^{(k)}(t) = \mathbf{f}^{(k)} + \alpha \mathbf{g}^{(k)}, k = 1, 2, 3; \quad (29)$$

$$\mathbf{f} = [B_0^5(t) + B_1^5(t)] \mathbf{P}_0 + \left[\frac{B_2^5(t) + B_3^5(t)}{2}\right] \mathbf{P}_1 + \left[\frac{B_2^5(t) + B_3^5(t)}{2}\right] \mathbf{P}_2 + [B_4^5(t) + B_5^5(t)] \mathbf{P}_3; \quad (30)$$

$$\mathbf{g} = -B_1^5(t) \mathbf{P}_0 + B_1^5(t) \mathbf{P}_1 + B_4^5(t) \mathbf{P}_2 - B_4^5(t) \mathbf{P}_3. \quad (31)$$

将式(30)、式(31)代入公式(29)中,再将所得公式代入式(28),化简,有

$$\alpha = \frac{\int_0^1 \mathbf{f}^{(k)} \cdot \mathbf{g}^{(k)} dt}{\int_0^1 \mathbf{g}^{(k)} \cdot \mathbf{g}^{(k)} dt}, k = 1, 2, 3. \quad (32)$$

规定 $\mathbf{P} = (\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3)$.

当 $k = 1$ 时,有

$$\alpha = 3 \frac{\mathbf{P} \mathbf{X}_1 \mathbf{P}^T}{\mathbf{P} \mathbf{Y}_1 \mathbf{P}^T}.$$

式中:

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{5}{42} & \frac{1}{21} & -\frac{1}{3} & \frac{11}{21} \\ 0 & \frac{1}{14} & \frac{1}{7} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{14} & \frac{1}{21} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{42} \end{pmatrix}; \mathbf{Y}_1 = \begin{pmatrix} \frac{20}{7} & -\frac{40}{7} & 1 & -1 \\ 0 & \frac{20}{7} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{20}{7} & -\frac{40}{7} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{20}{7} \end{pmatrix}.$$

当 $k = 2$ 时,有

$$\alpha = \frac{7}{4} \frac{\mathbf{P} \mathbf{X}_2 \mathbf{P}^T}{\mathbf{P} \mathbf{Y}_2 \mathbf{P}^T}.$$

式中:

$$\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{44}{7} & \frac{65}{7} & \frac{19}{7} & \frac{4}{7} \\ 0 & -3 & -6 & \frac{19}{7} \\ 0 & 0 & -3 & \frac{65}{7} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{44}{7} \end{pmatrix}; \mathbf{Y}_2 = \begin{pmatrix} 26 & -52 & 3 & -3 \\ 0 & 26 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 26 & -52 \\ 0 & 0 & 0 & 26 \end{pmatrix}.$$

当 $k = 3$ 时,有

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{\mathbf{P} \mathbf{X}_3 \mathbf{P}^T}{\mathbf{P} \mathbf{Y}_3 \mathbf{P}^T}.$$

式中:

$$\mathbf{X}_3 = \begin{pmatrix} -5 & 8 & 4 & -2 \\ 0 & -3 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}; \mathbf{Y}_3 = \begin{pmatrix} 4 & -8 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

由于能量函数式只是弧长、曲率、曲率变化率的近似表达式,因此对能量函数极小化所求得参数值可能不一定落在区间 $[0, 1]$ 之中,这里规定当求出的参数 α 值小于 0 时,便取 $\alpha = 0$; 当求出的参数 α 值大于 1 时,就取 $\alpha = 1$. 图 6 为由相同控制顶点定义的组合 Bézier 曲线以及能量极小的组合扩展曲线. 可以看出,根据曲率变化率极小构造出的曲线与 Bézier 曲线最为接近.

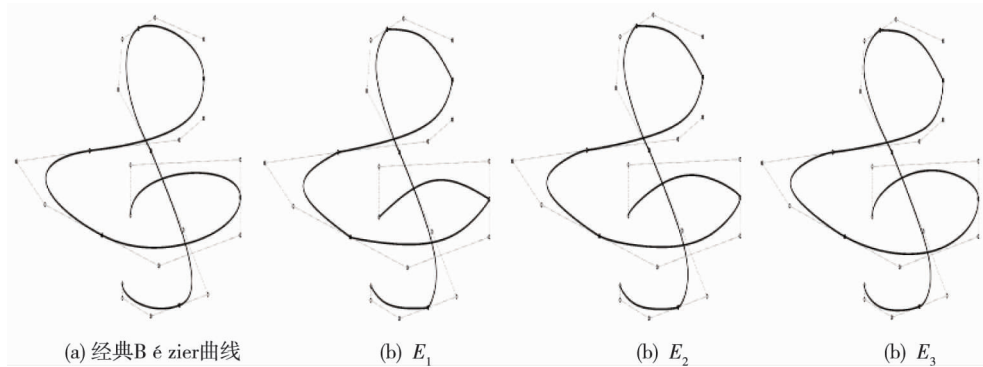


图9 Bézier 曲线与能量极小扩展曲线

3 扩展曲面

利用张量积方法,可以将单变量的扩展曲线推广至双变量的扩展曲面.

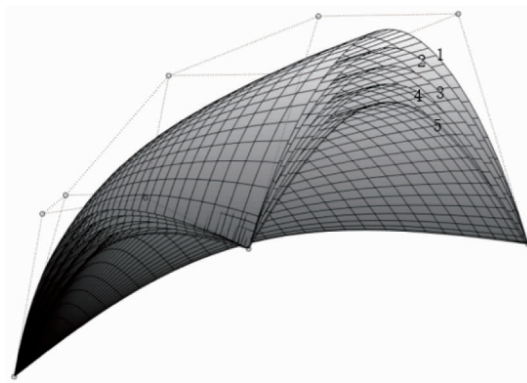
定义 3 给定 \mathbf{R}^3 中呈矩形阵列的 4×4 个控制顶点 $\mathbf{P}_{ij} (i = 0, 1, 2, 3; j = 0, 1, 2, 3)$, 可以定义一张扩展曲面

$$\mathbf{r}(u, v) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 b_{3i}(u) b_{3j}(v) \mathbf{P}_{ij}, 0 \leq u, v \leq 1.$$

式中: $b_{3i}(u), b_{3j}(v)$ 为参照式(1)定义的 u 向、 v 向调配函数.

由于扩展曲面与扩展曲线都是基于 α 函数定义的,因此,扩展曲面具有与扩展曲线类似的性质.例如,因为调配函数 $b_{3i}(u)$ 与 $b_{3j}(v)$ 中都含有形状参数,所以即使不改变控制网格,依然可以通过改变形状参数的取值来对扩展曲面的形状进行调整.

图 10 为控制顶点保持不变, α 取不同值时的扩展曲面,其中曲面 1~曲面 5 分别对应 α 取 1.00, 0.75, 0.50, 0.25, 0.由图 10 可知:随着 α 的增加,扩展曲面逐渐逼近控制网格,整张曲面的形状和位置逐渐发生改变.

图 10 α 取不同值时的扩展曲面

4 结论

1) 由带有形状参数 α 的调配函数所定义的三次 Bézier 扩展曲线具有类似 3 次 Bézier 曲线的特征,如凸包性、对称性与变差缩减性等性质.

2) 三次扩展曲线结构上与传统三次 Bézier 曲线相似,由于调配函数次数的增加,扩展曲线在计算复杂度上略有提升,但由于新调配函数的特性,该曲线部分比传统 Bézier 曲线更具优势.

3) 扩展曲线的优点为形状调整更加灵活,在控制顶点确定时,可通过改变 α 的取值来调整曲线形状,在区间 $[0, 1]$ 内, α 值越大,扩展曲线越逼近控制多边形,并且比三次 Bézier 曲线逼近性更好,拼接条件更

加简便. 扩展曲线在达到 C^2 连续条件时, 会自动满足 FC^3 连续条件, 而 $C^2 \cap FC^3$ 连续条件在实际应用中较为合理且能满足应用需求, 同时给出了曲线 G^1 至 G^3 连续的条件. 通过能量函数, 还计算了与曲线弧长最短、曲率最小以及曲率变化率最小这样的设计目标最接近的形状参数的取值.

这些优点为扩展曲线的实际应用奠定了基础. 利用张量积的办法, 可以得到性质与扩展曲线一致的扩展曲面, 限于篇幅原因, 本文对此未展开详细论述, 特别是扩展曲面的光滑拼接条件, 这将是下一步的研究重点.

参考文献:

- [1] 严兰兰, 饶智勇, 黄涛. Bézier 曲线的同次扩展及其参数选择[J]. 中国图象图形学报, 2018, 23(9): 1411-1423.
- [2] 李军成, 刘成志. 带两个形状参数的同次 Bézier 曲线[J]. 计算数学, 2017, 39(2): 115-128.
- [3] Yan L L, Liang J F. An extension of the Bézier model [J]. Applied Mathematics and Computation, 2011, 218(6): 2863-2879.
- [4] 陈晓彦, 王伟利, 魏慧琪, 等. 形状可调的 C^2 拟三次 Bézier 样条曲线[J]. 合肥工业大学学报(自然科学版), 2019, 42(10): 1431-1435.
- [5] 吴晓勤, 韩旭里, 罗善明. 四次 Bézier 曲线的两种不同扩展[J]. 工程图学学报, 2006(5): 59-64.
- [6] 严兰兰, 梁炯丰, 黄涛. 两种带形状参数的三角曲线[J]. 图学学报, 2012, 33(1): 25-30.
- [7] 严兰兰, 韩旭里, 黄涛. 带一个形状参数的 3 次三角多项式曲线曲面[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2016, 28(7): 1047-1058.
- [8] Zhu Y, Liu Z. A class of trigonometric Bernstein-type basis functions with four shape parameters [J]. Mathematical Problems in Engineering, 2019, 2019(3): 1-16.
- [9] Han X A, Ma Y C, Huang X L. The cubic trigonometric Bézier curve with two shape parameters [J]. Applied Mathematics Letters, 2009, 22(2): 226-231.
- [10] Bashir U, Abbas M, Ali J M. The G^2 and C^2 rational quadratic trigonometric Bézier curve with two shape parameters with applications [J]. Applied Mathematics and Computation, 2013, 219(20): 10183-10197.
- [11] Tan X, Zhu Y. Quasi-quintic trigonometric Bézier curves with two shape parameters [J]. Computational and Applied Mathematics, 2019, 38(4): 157.
- [12] Costantini P, Manni C. Geometric construction of spline curves with tension properties [J]. Computer Aided Geometric Design, 2003, 20(8/9): 579-599.
- [13] Xu G, Wang G Z, Chen W Y. Geometric construction of energy-minimizing Bézier curves [J]. Science China Information Sciences, 2011, 54(7): 1395-1406.