

崔馨月,罗立胜,谢欣然,等.无侧移结构的广义力矩分配法与位移法联合法[J].湖南科技大学学报(自然科学版),2022,37(4):18-24. doi:10.13582/j.cnki.1672-9102.2022.04.003

CUI X Y, LUO L S, XIE X R, et al. Combined Method of Generalized Moment Distribution Method and Displacement Method for Structures Without Sidesway[J]. Journal of Hunan University of Science and Technology (Natural Science Edition), 2022,37(4): 18-24. doi:10.13582/j.cnki.1672-9102.2022.04.003

# 无侧移结构的广义力矩分配法与位移法联合法

崔馨月,罗立胜\*,谢欣然,张永强

(海南大学 土木建筑工程学院,海南 海口 570228)

**摘要:**在广义力矩分配法的基础上,引入广义转动刚度系数的概念,建立广义力矩分配法和位移法的联合法,求解得到精确的计算结果.首先,在所有未知转角位移刚节点处施加刚臂,计算得到杆端的固端弯矩,释放尽量多的结点,计算得到未分配结点处的不平衡力矩;然后,以未分配结点处的转角位移为基本未知量,建立位移法典型方程,再利用广义力矩分配法计算得到广义转动刚度系数;最后,求解计算典型方程,利用叠加法绘制最终弯矩图.以多跨连续梁和多层框架作为算例,演示联合法的具体计算步骤,并对分析矩阵位移法、联合法和分层法的计算结果,验证了联合法的准确性和有效性.

**关键词:**广义力矩分配法;位移法;广义转动刚度系数;位移法典型方程

**中图分类号:**TU311 **文献标志码:**A **文章编号:**1672-9102(2022)04-0018-07

## Combined Method of Generalized Moment Distribution Method and Displacement Method for Structures Without Sidesway

CUI Xinyue, LUO Lisheng, XIE Xinran, ZHANG Yongqiang

(College of Civil Engineering and Architecture, Hainan University, Haikou 570228, China)

**Abstract:** Based on the generalized moment distribution method, this paper establishes a combined method of the generalized moment distribution method and the displacement method, which obtains an exact solution by introducing the concept of the generalized rotation stiffness coefficient. To obtain final bending moment, the steps should be finished as follows. Firstly, the rigid arms are applied to all the rigid joints with unknown slope-displacement, and the fixed-end bending moment and the unbalanced moment at the undistributed joints can be calculated by releasing as many joints as possible. Then, taking the rotation displacement of undistributed joints as the basic unknown quantities, the canonical equation of displacement method is established, and the generalized rotation stiffness coefficient is calculated by utilizing the generalized moment distribution method. Lastly, the final bending moment diagram is obtained through the solution of the canonical equation with the superposition method. Multi-span continuous beams and multistory frames are taken as examples to demonstrate the specific calculation steps of the combined method, and the accuracy and the validity of proposed method are verified through comparative analysis of the calculation results of combined method and layer-based distribution method.

收稿日期:2020-10-26 修改日期:2022-03-14

基金项目:海南省高层次人才项目资助(2019RC055);海南省教改研究项目资助(Hnjg2021-13);国家自然科学基金资助项目(51808176)

\*通信作者, E-mail: luolisheng2015@hainanu.edu.cn

**Keywords:** generalized moment distribution method; displacement method; generalized rotation stiffness coefficient; canonical equation of displacement method

位移法是在力法的基础上提出的,是分析超静定结构的基本方法之一.然而,位移法需要组成和解算典型方程,当未知量较多时,解算联立方程的工作非常繁重<sup>[1-2]</sup>.为了寻求计算超静定结构更快速简捷的方法和途径,美国力学工作者 Hardy Cross 于 1932 年提出了力矩分配法<sup>[3-4]</sup>.传统力矩分配法避免了组成和解算典型方程,而以逐次渐进的方法来计算杆端弯矩,其计算结果的精度随着计算轮次的增加而提高,最后收敛于精确解<sup>[5]</sup>.传统力矩分配法的物理概念生动形象,每轮计算都按同一步骤重复进行,易于掌握,适合手算<sup>[6]</sup>.然而,传统力矩分配法仍然具有适用范围小、计算量大和计算精度有限的缺点,因此,许多学者陆续提出了多种改进方法.徐汉忠等<sup>[7-10]</sup>基于级数求和方法求得多次分配弯矩和传递弯矩之和,该方法求解得到的结果为精确解;刘天一等<sup>[11]</sup>基于等比数列递推公式,推导建立了含有 3 个分配点结构的弯矩分配公式精确求解方法;蒋亚琼等<sup>[12]</sup>研究了含有抗弯刚度无穷大杆件结构的力矩分配法;韦爱凤等<sup>[13-14]</sup>采用 Excel 表格编制出了力矩分配法的计算表格;黄欢等<sup>[15]</sup>提出多集中荷载作用下单跨超静定梁的等效荷载确定方法.上述改进方法在提高计算精度的同时克服了传统力矩分配法更适于手算的缺点,避免了繁琐的计算,扩大了力矩分配法的适用范围<sup>[16-17]</sup>,但不平衡力矩的传递过程依旧复杂.

本文提出的广义力矩分配法,其相关概念具有明确的物理意义,同时克服了不平衡力矩的逐次分配传递,通过一次分配传递即可求解得到杆端弯矩,而且计算结果为精确解.为拓展广义力矩分配法的应用范围,进一步提出了广义力矩分配法与位移法联合法,该方法可加深对相关概念的理解,可保证计算精度和计算效率,也可以用于计算竖向荷载作用下的框架结构弯矩,并且所求结果为精确解.所得结果表明所提方法具有一定的学术价值和工程应用价值.

## 1 广义力矩分配法计算原理

传统力矩分配法首先在刚结点处施加刚臂,将整个结构离散为多个单跨梁,并计算荷载作用下各单跨梁的固端弯矩;然后计算结点处的不平衡弯矩,并通过对各结点的轮流放松,实现对不平衡力矩的分配、传递,直到传递弯矩小到满足精度要求时,停止弯矩的分配和传递;最后,将固端弯矩和分配弯矩、传递弯矩叠加,得到各跨梁的最终弯矩.传统力矩分配法在分配、传递不平衡力矩时,不平衡力矩会逐渐变小,但始终存在,因此,多分配结点结构采用力矩分配法只能得到近似解.

由上述分析可知:传统力矩分配法的力矩分配传递是以不同支座约束条件的单跨梁为基本计算单元.本文在传统力矩分配法的基础上,提出了以两跨梁为基本计算单元的广义力矩分配法<sup>[18]</sup>.广义转动刚度系数、两跨梁的固端弯矩的计算方法如下.

### 1.1 广义转动刚度系数计算

两跨梁的广义转动刚度系数是建立在单跨梁的基础上,即对单跨梁的转动刚度系数进行分配传递,继而计算得到两跨梁的梁端结点的广义转动刚度系数.由于两跨梁为单分配结点结构,传统力矩分配法的计算结果为精确解,因此,两跨梁的广义转动刚度系数为精确解.

为演示两跨梁的广义转动刚度系数的计算,以两端固接的两跨连续梁为例(图 1).首先,在 B 结点施加刚臂;其次,令 A 结点发生单位转角,则此时 AB 梁 A 端的杆端弯矩为  $4i_1$ , AB 梁 B 端的杆端弯矩为  $2i_1$ ,故 B 结点存在  $2i_1$  的不平衡力矩;再次,采用传统力矩分配法对 B 结点处的不平衡力矩进行分配传递,进而计算得到 AB 梁和 BC 梁的分配传



$i_1$  为梁 AB 的线刚度;  $i_2$  为梁 BC 的线刚度

图 1 两端固接两跨梁初始基本结构

递弯矩;最后,累加计算梁端固端弯矩和分配传递弯矩,得到梁端的最终弯矩.此时, A 结点处的最终弯矩值即为 A 结点的广义转动刚度系数,即 A 结点产生单位转角所引起的 A 结点固端约束的反弯矩.表 1 为该两跨梁 A 结点的广义刚度系数的计算过程,图 2 为两端固接两跨梁 A 结点发生单位转角时的杆端弯矩.同

理,可计算得到左端固接右端铰接的两跨连续梁 A 结点的基本结构和广义刚度系数分别如图 3 和表 2 所示,左端固接右端铰接两跨梁 A 结点发生单位转角时的杆端弯矩如图 4 所示.

表 1 两端固接两跨梁 A 结点广义转动刚度系数

参数	位置			
	A 结点	B 结点左侧	B 结点右侧	C 结点
传统分配系数		$\frac{i_1}{i_1 + i_2}$	$\frac{i_2}{i_1 + i_2}$	
传统转动刚度系数	$4i_1$	$2i_1$		
B 结点分配传递	$-\frac{i_1^2}{i_1 + i_2}$	$-\frac{2i_1^2}{i_1 + i_2}$	$-\frac{2i_1i_2}{i_1 + i_2}$	$-\frac{i_1i_2}{i_1 + i_2}$
广义转动刚度系数	$\frac{3i_1^2 + 4i_1i_2}{i_1 + i_2}$	$\frac{2i_1i_2}{i_1 + i_2}$	$-\frac{2i_1i_2}{i_1 + i_2}$	$-\frac{i_1i_2}{i_1 + i_2}$

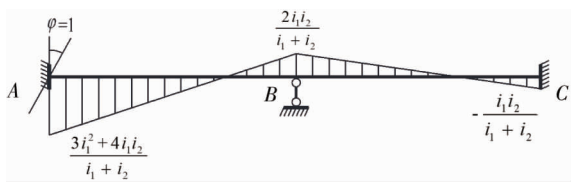


图 2 两端固接两跨梁杆端弯矩



图 3 左端固接右端铰接两跨梁初始基本结构

表 2 左端固接右端铰接两跨梁 A 结点广义转动刚度系数

参数	位置			
	A 结点	B 结点左侧	B 结点右侧	C 结点
传统分配系数		$\frac{4i_1}{4i_1 + 3i_2}$	$\frac{3i_2}{4i_1 + 3i_2}$	
传统转动刚度系数	$4i_1$	$2i_1$		
B 结点分配传递	$-\frac{4i_1^2}{4i_1 + 3i_2}$	$-\frac{8i_1^2}{4i_1 + 3i_2}$	$-\frac{6i_1i_2}{4i_1 + 3i_2}$	0
广义转动刚度系数	$\frac{12i_1^2 + 12i_1i_2}{4i_1 + 3i_2}$	$\frac{6i_1i_2}{4i_1 + 3i_2}$	$-\frac{6i_1i_2}{4i_1 + 3i_2}$	0

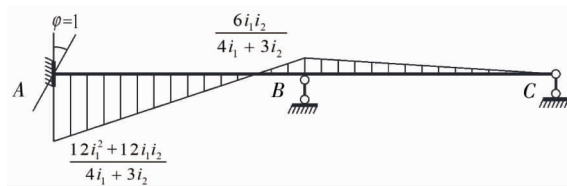


图 4 左端固接右端铰接两跨梁杆端弯矩

### 1.2 固端弯矩计算

两跨梁的固端弯矩可在单跨梁的基础上,利用传统力矩分配法对中间结点的不平衡力矩进行分配传递,得到固端弯矩.采用传统力矩分配法计算两跨梁的固端弯矩时,分配传递一次即可完成,且不存在不平衡力矩,即两跨梁的固端弯矩为精确解.

## 2 广义力矩分配法与位移法联合法

### 2.1 基本原理

位移法求解无侧移结构时可分为 3 个步骤:首先,通过在有转角位移的刚节点处施加刚臂约束得到基本结构,即将整体结构离散为多个单跨梁;然后,基于单跨梁的转动刚度系数和固端弯矩,根据结点平衡条

件计算得到位移法典型方程的刚度系数和自由项;最后,求解计算位移法典型方程,进而根据叠加法原理得到结构的最终弯矩图。

由于传统位移法将整体结构离散为单跨梁,导致施加刚臂约束的结点数较多,进而导致位移法典型方程的未知量较多,增加了典型方程求解的计算工作量.本文提出的广义力矩分配法与位移法联合法,其基本原理是将整体结构离散为两跨梁或者单分配结点结构.由于广义力矩分配法计算得到的广义转动刚度系数和固端弯矩均为精确解,而且位移法解算典型方程组的解也为精确解,因此,所提出的广义力矩分配法与位移法联合法,其计算结果为精确解。

与传统力矩分配法和传统位移法不同,广义力矩分配法和位移法联合法将刚臂细分为次刚臂和主刚臂.联合法在计算结构时,首先施加主刚臂,将整个结构离散为两跨梁或者单分配结点结构;然后施加次刚臂,将两跨梁或者单分配结点结构离散为单跨梁.主刚臂在广义力矩分配法的计算过程中一直不释放,最终作为位移法的约束刚臂,故主刚臂数即为位移法的未知量数;次刚臂在广义力矩分配法的计算过程中释放,用于计算双跨梁的广义刚度系数和固端弯矩.由于主刚臂数不多于次刚臂数,故联合法的典型方程未知量数至少为传统位移法未知量数的一半,大大压缩了解算位移法典型方程的计算工作量。

## 2.2 计算步骤

联合法的计算步骤如下:

1) 固定结点.首先在刚结点位置处施加主刚臂,将整个结构离散为两跨梁或者单分配结点结构;然后施加次刚臂,将两跨梁或者单分配结点结构离散为单跨梁;再计算荷载作用下单跨梁的固端弯矩,进而计算得到所有刚臂处的不平衡力矩。

2) 放松次刚臂约束处的结点.采用广义力矩分配法,对次刚臂约束处的不平衡力矩进行分配传递,将整个结构离散为多个两跨梁或单分配结点结构,并可计算得到主刚臂处的不平衡力矩。

3) 建立位移法典型方程.一直未释放的主刚臂数即为位移法的未知量数,因此,可根据主刚臂的反力矩等于0的条件建立位移法的典型方程.此时,主刚臂处的不平衡力矩即为位移法典型方程的自由项。

4) 计算位移法典型方程的刚度系数.利用广义力矩分配法计算得到两跨梁或单分配结点结构的广义转动刚度系数,进而根据主刚臂处的平衡条件计算求得位移法典型方程的刚度系数。

5) 求解计算位移法典型方程,求出作为基本未知量所代表的各结点位移。

6) 按叠加法绘制最终弯矩图。

## 3 算例

为演示广义力矩分配法与位移法联合法应用的计算步骤,分别选取多跨连续梁和多层框架作为算例。

### 3.1 多跨连续梁算例

本算例为六跨连续梁,结构如图5所示.计算该连续梁时,首先施加主刚臂1和主刚臂2,将六跨连续梁离散为3个两跨梁,然后施加次刚臂3、次刚臂4和次刚臂5,将两跨梁离散为单跨梁,得到的初始基本结构如图6所示.计算得到荷载作用下单跨梁的杆端固端弯矩如图7所示,继而求得约束结点位置处的不平衡力矩.采用传统力矩分配法,同时释放次刚臂3、次刚臂4和次刚臂5上的不平衡力矩,得到两跨梁的固端弯矩如图8所示.此时,主刚臂1和主刚臂2的转角位移即为位移法的基本未知量,典型方程如下:

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1p} = 0; \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2p} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

式中: $r_{11}$ 为 $Z_1=1$ 时主刚臂1的刚度系数; $Z_1$ 为主刚臂1的转角位移; $r_{12}$ 为 $Z_2=1$ 时主刚臂1的刚度系数; $Z_2$ 为主刚臂2的转角位移; $R_{1p}$ 为荷载引起的主刚臂1上的不平衡力矩; $r_{21}$ 为 $Z_1=1$ 时主刚臂2的刚度系数; $r_{22}$ 为 $Z_2=1$ 时主刚臂2的刚度系数; $R_{2p}$ 为荷载引起的主刚臂2上的不平衡力矩。

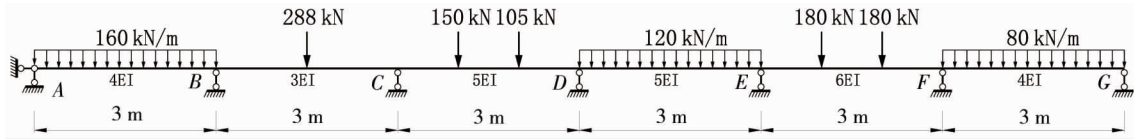


图5 六跨连续梁结构

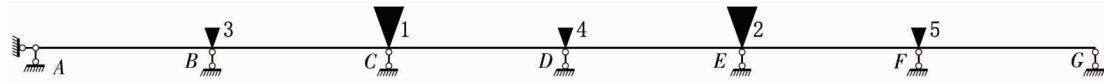


图6 初始基本结构

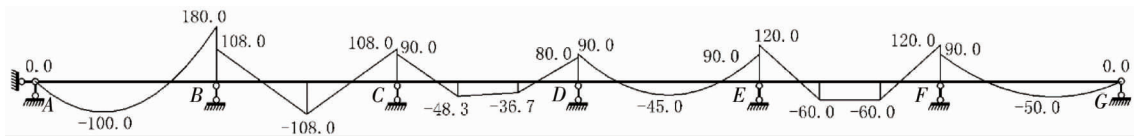


图7 初始基本结构固端弯矩(单位:kN·m)

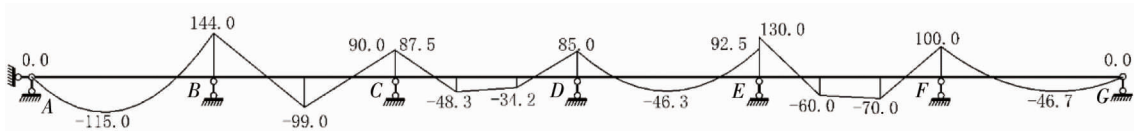


图8 结构固端弯矩(单位:kN·m)

由图8可知:自由项  $R_{1p}=2.5 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $R_{2p}=-37.5 \text{ kN}\cdot\text{m}$ .采用广义力矩分配法或直接查询图2、图4,计算得到AC双跨梁C结点处和CE双跨梁C结点处的广义转动刚度系数如图9所示,可以计算求得刚度系数  $r_{11}=28 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $r_{12}=-2.5 \text{ kN}\cdot\text{m}$ .采用广义力矩分配法或直接查询图2、图4,计算得到CE双跨梁E结点处和EG双跨梁E结点处的广义转动刚度系数如图10所示,可以计算求得刚度系数  $r_{21}=-2.5 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $r_{22}=37.5 \text{ kN}\cdot\text{m}$ .将上述刚度系数和自由项代入典型方程式(1),可解得  $Z_1=0$ ,  $Z_2=1$ .按照叠加法绘制结构最终弯矩如图11所示.

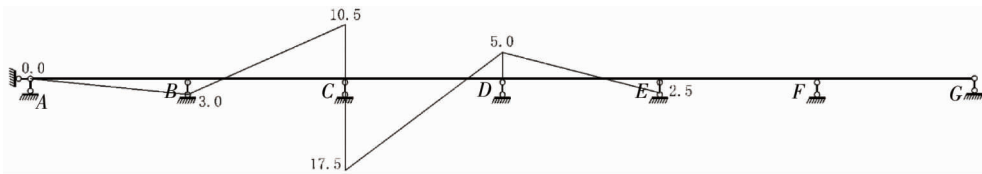


图9 C结点广义转动刚度系数(单位:kN·m)

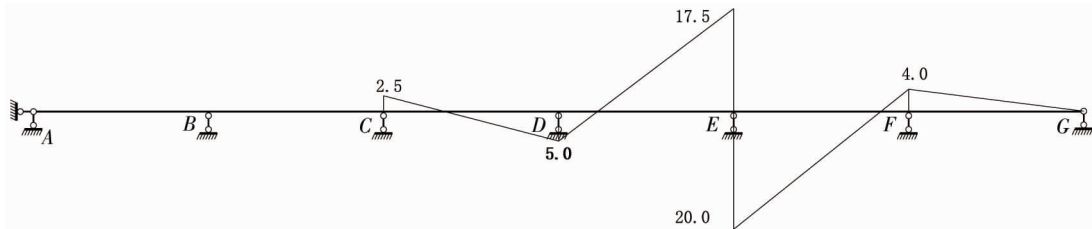


图10 E结点广义转动刚度系数(单位:kN·m)

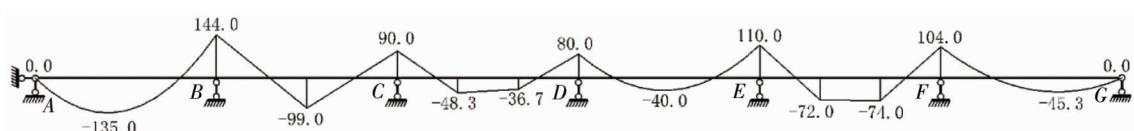


图11 最终结构弯矩(单位:kN·m)

### 3.2 多层框架算例

某 4 层钢筋混凝土框架结构的跨度、层高、荷载、杆件编号和节点编号如图 12 所示.梁的截面尺寸为 250 mm×600 mm,混凝土采用 C20(弹性模量  $E=2.55\times 10^4$  MPa);柱的截面尺寸为 450 mm×450 mm,混凝土采用 C30(弹性模量  $E=3.0\times 10^4$  MPa).现浇梁柱,楼盖为预应力圆孔板.

由于所计算的结构为对称结构承受对称荷载,计算左半边结构即可,左半边结构如图 13 所示.由图 13 的半结构可知:该结构没有侧向位移,因此,可采用所提出的联合法计算分析.采用所提出的联合法计算时,首先施加主刚臂 1、主刚臂 2、主刚臂 3 和主刚臂 4,将框架离散为 4 个单分配结点结构,然后施加次刚臂 5、次刚臂 6、次刚臂 7 和次刚臂 8,将框架离散为单跨梁和单跨柱.主刚臂数为 4 个,则典型方程未知量为 4 个,按照联合法求解的计算结果如表 3 所示.采用分层法计算该结构时,先将结构分为 4 个单层结构,每个单层结构采用力矩分配法进行计算,除底层以外其他各层柱的线刚度均乘以 0.9 的折减系数,除底层以外其他各层柱的力矩传递系数取 1/3,计算精度控制在 0.01%,最后采用叠加法将 4 个单层结构的弯矩叠加得到最终弯矩图,计算工作量与所提方法相当.为对比分析所提联合法的精确性,同时采用忽略轴向变形的矩阵位移法计算该结构,计算结果见表 3.由表 3 可知:所提联合法的计算结果与矩阵位移法的计算结果一致,表明联合法的结果为精确解,分层法计算结果的误差较大,最大误差为 26.1%.

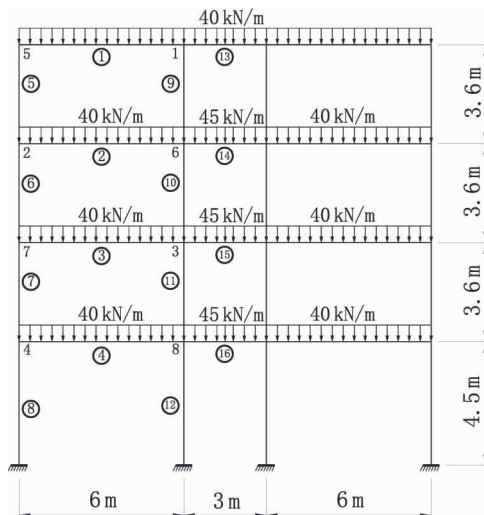


图 12 混凝土框架结构

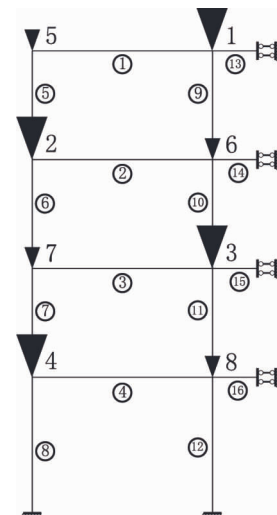


图 13 左半边结构

表 3 框架梁、柱弯矩计算结果对比

杆端	矩阵位移法	联合法	分层法	误差/%	杆端	矩阵位移法	联合法	分层法	误差/%
①左	-82.3	-82.3	-78.2	5.0	⑧下	17.6	17.6	22.2	26.1
①右	114.1	114.1	116.4	2.0	⑧上	35.3	35.3	39.7	12.5
②左	-105.6	-105.6	-101.4	4.0	⑨下	-39.2	-39.2	-35.4	9.7
②右	116.4	116.4	121.0	4.0	⑨上	-51.0	-51.0	-48.1	5.7
③左	-102.2	-102.2	-101.4	0.8	⑩下	-30.5	-30.5	-31.8	4.3
③右	116.2	116.2	119.8	3.1	⑩上	-29.0	-29.0	-30.4	4.8
④左	-96.0	-96.0	94.2	1.9	⑪下	-38.2	-38.2	-34.1	10.7
④右	115.7	115.7	117.4	1.5	⑪上	-35.1	-35.1	-31.8	9.4
⑤下	61.7	61.7	55.1	10.7	⑫下	-11.0	-11.0	-13.6	23.6
⑤上	82.3	82.3	78.2	5.0	⑫上	-22.0	-22.0	-24.9	13.2
⑥下	46.9	46.9	55.1	17.5	⑬左	-63.1	-63.1	-68.3	8.2
⑥上	44.0	44.0	46.3	5.2	⑭左	-48.2	-48.2	-55.1	14.3
⑦下	60.7	60.7	54.6	10.0	⑮左	-50.6	-50.6	-56.2	9.1
⑦上	55.3	55.3	46.4	16.1	⑯左	-55.5	-55.5	-58.4	5.2



## 4 结论

1) 联合法采用广义力矩分配法计算双跨梁或者单分配结点结构的固端弯矩和广义转动刚度系数,从而减少了传统位移法的未知量数,降低了计算工作量,而且计算结果为精确解,实用性强。

2) 联合法是对传统力矩分配法和位移法的改进完善,各相关系数具有明确的物理意义,并有严谨的计算步骤,可以替代分层法计算竖向荷载作用下的框架弯矩,具有一定的学术价值和工程应用价值。

### 参考文献:

- [1] 李廉锟. 结构力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2010.
- [2] Bao S H, Gong Y Q. Structural Mechanics [M]. Wuhan: Wuhan University of Technology Press, 2006.
- [3] Junarkar S B, Shah H J. Mechanics of Structures: II [M]. Anand: Charotar Publishing House, 1999.
- [4] Samuelsson A, Zienkiewicz O C. History of the Stiffness Method [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2006, 67(2): 149-157.
- [5] 朱慈勉. 结构力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2016.
- [6] Volokh K Y. On foundation of the Hardy Cross method [J]. International Journal of Solids and Structures, 2002, 39(16): 4197-4200.
- [7] 徐汉忠. 结构力学中结点不平衡力矩分配传递的极限公式[J]. 河海大学学报, 1997, 25(6): 60-64.
- [8] 徐汉忠, 周兰庭. 三跨刚架弯矩分配传递无限次的闭合解[J]. 南京理工大学学报, 2001, 25(4): 412-415.
- [9] 徐汉忠. 四杆封闭结构在任意荷载作用下的精确解[J]. 河海大学学报, 2001, 29(5): 106-109.
- [10] 徐汉忠, 奚康洪, 律海燕. 六跨刚架弯矩分配传递无限次的闭合解[J]. 南京工业大学学报, 2004, 26(1): 33-36.
- [11] 刘天一, 陈素文. 含3个分配点结构的弯矩分配公式法精确解[J]. 力学与实践, 2014, 36(2): 207-210.
- [12] 蒋亚琼, 方达宪, 张裕怡. 基于力矩分配法求解特殊超静定结构的新算法[J]. 合肥学院学报(自然科学版), 2015, 25(3): 53-56.
- [13] 韦爱凤, 梁靖波. 力矩分配法的快速实用计算研究[J]. 力学与实践, 2006, 28(2): 83-85.
- [14] 张劲. 用 Excel 绘制连续梁的弯矩图方法探索[J]. 中国设备工程, 2020(5): 199-200.
- [15] 黄欢, 唐贵和, 李文雄. 基于固端弯矩相等原则的等效荷载法[J]. 科学技术与工程, 2021, 21(32): 13801-13807.
- [16] 谢飞. 关于用力矩分配法求解超静定结构内力的研究[J]. 山西建筑, 2016, 42(7): 51-53.
- [17] 金波, 邓露, 刘又文. 竖向荷载作用下框架结构力学模型的简化与计算[J]. 力学与实践, 2020, 42(1): 50-55.
- [18] 罗立胜, 石宇, 鲁晓书. 多分配结点结构的广义力矩分配法[J]. 辽宁工程技术大学学报(自然科学版), 2018, 37(1): 120-123.