

银鹤凡,王琦.一类前向时滞微分方程 Runge-Kutta 方法的振动性[J].湖南科技大学学报(自然科学版),2023,38(1):116-124. doi:10.13582/j.cnki.1672-9102.2023.01.015

YIN H F, WANG Q. Oscillation of Runge-Kutta Methods for a Kind of Delay Differential Equations of Advanced Type [J]. Journal of Hunan University of Science and Technology (Natural Science Edition), 2023, 38(1):116-124. doi:10.13582/j.cnki.1672-9102.2023.01.015

一类前向时滞微分方程 Runge-Kutta 方法的振动性

银鹤凡,王琦*

(广东工业大学 数学与统计学院,广东 广州 510006)

摘要:研究了一类特殊时滞微分方程——前向分段连续型微分方程数值解的振动性.利用 Runge-Kutta 方法对方程进行离散,得到数值方法保持解析解振动性的条件.同时讨论了稳定性与振动性的关系.最后给出几个数值例子来验证相应的结果.

关键词:Runge-Kutta 方法;数值解;振动;非振动

中图分类号: O241 **文献标志码:** A **文章编号:** 1672-9102(2023)01-0116-09

Oscillation of Runge-Kutta Methods for a Kind of Delay Differential Equations of Advanced Type

YIN Hefan, WANG Qi

(School of Mathematics and Statistics, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510006, China)

Abstract: The paper focuses on the oscillation of numerical solution of a special kind of delay differential equations: differential equations with piecewise continuous arguments of advanced type. The Runge-Kutta methods are applied to discretize the mentioned equation, and the conditions of numerical methods preserve the oscillation of analytic solution are obtained. At the same time, this paper also discusses the relationship between stability and oscillation. Finally, several numerical examples are given to verify the corresponding results.

Keywords: Runge-Kutta methods; numerical solution; oscillation; non-oscillation

近年来,对时滞微分方程的数值探索^[1-5]成为计算数学的研究热点之一,而作为一类重要的时滞微分方程,分段连续型微分方程(Differential Equations with Piecewise Continuous Arguments,简记为 EPCA)更是受到很多学者的普遍关注^[6-9].由于 EPCA 具有的独特结构,使其成为具有实际应用意义的数学模型^[10-12].目前,对 EPCA 的数值离散方法常见的有 θ -方法^[13]、Runge-Kutta 方法^[14]等.更多的关于 EPCA 数值解性质的研究,有兴趣的读者请参阅文献[15-18].

本文针对前向 EPCA,研究了 Runge-Kutta 方法的振动性,得到数值解的振动条件以及振动性与稳定

收稿日期:2020-11-15

基金项目:国家自然科学基金资助项目(11201084);广东省自然科学基金资助项目(2017A030313031)

*通信作者,E-mail:bmwzq@126.com

性的关系. 考虑方程(1):

$$x'(t) = ax(t) + a_0x([t]) + a_1x([t+1]), \quad x(0) = x_0. \quad (1)$$

式中: $[\cdot]$ 为最大取整函数.

记

$$b_0(t) = e^{at} + a^{-1}a_0(e^{at} - 1), \quad b_1(t) = a^{-1}a_1(e^{at} - 1), \quad \lambda = b_0(1)/(1 - b_1(1)). \quad (2)$$

引理 1^[19] 方程(1)在 $[0, \infty)$ 上具有唯一解:

$$x(t) = (b_0(\{t\}) + \lambda b_1(\{t\})) \lambda^{\lceil t \rceil} c_0. \quad (3)$$

式中: $\{t\}$ 是 t 的小数部分.

引理 2^[19] 方程(1)的零解渐近稳定的充要条件是

$$(a + a_0 + a_1) \left(a_1 - a_0 - \frac{a(e^a + 1)}{e^a - 1} \right) > 0. \quad (4)$$

引理 3^[19] 如果

$$\left(a_0 + \frac{ae^a}{e^a - 1} \right) \left(a_1 - \frac{a}{e^a - 1} \right) > 0 \quad (5)$$

成立, 则方程(3)在区间 $(n, n+1)$ 内有精确的零点

$$t_n = n + \frac{1}{a} \ln \frac{a_0 + a_1 e^a}{a + a_0 + a_1},$$

如果不等式(5)不成立, 那么方程(3)在 $[0, \infty)$ 没有零点.

1 数值振动和非振动性

1.1 差分格式

Runge-Kutta 方法在占有的计算资源和精确度方面都远比 Euler 法或改进 Euler 法好, 故本文采用 Runge-Kutta 方法求解给定的方程. Runge-Kutta 方法的 Butcher 列形式^[20]为

$$\begin{array}{c|c} \mathbf{C} & \mathbf{A} \\ \hline & \mathbf{B}^T \end{array}$$

式中: $\mathbf{A} = (a_{ij})$ 为 Runge-Kutta 矩阵; \mathbf{B}^T 为权向量; \mathbf{C} 为节点向量.

设 $h = 1/m$ 为步长, 将 v 级 Runge-Kutta 方法 $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ 应用于方程(1)得

$$x_{n+1} = x_n + h \sum_{i=1}^v b_i (ax_i^{(n)} + a_0 y_i^{(n)} + a_1 y_i^{(n+m)});$$

$$x_i^{(n)} = x_n + h \sum_{j=1}^v a_{ij} (ax_j^{(n)} + a_0 y_j^{(n)} + a_1 y_j^{(n+m)}), \quad i = 1, 2, \dots, v.$$

式中: x_n 为 $x(t)$ 在 t_n 处的数值近似; $x_i^{(n)}, y_i^{(n)}$ 为对 $x(t_n + c_i h)$ 和 $x([t_n + c_i h])$ 的数值近似. 令 $n = km + l$, $l = 0, 1, \dots, m-1$, 根据文献[20]可得差分格式:

$$x_{km+l+1} = R(z) x_{km+l} + \frac{a_0}{a} [R(z) - 1] x_{km} + \frac{a_1}{a} [R(z) - 1] x_{(k+1)m}. \quad (6)$$

式中: $z = ha$; 函数 $R(z) = 1 + z\mathbf{B}^T (I - z\mathbf{A})^{-1} \mathbf{e}$ 为 Runge-Kutta 方法的稳定函数.

由方程(6)得到整数节点之间和任意节点之间的迭代关系式:

$$x_{(k+1)m} = \frac{R(z)^m + \frac{a_0}{a} [R(z)^m - 1]}{1 - \frac{a_1}{a} [R(z)^m - 1]} x_{km}; \quad (7)$$

$$x_{km+l} = \left(R(z)^l + \frac{a_0}{a} [R(z)^l - 1] \right) x_{km} + \frac{a_1}{a} [R(z)^l - 1] x_{(k+1)m}, \quad 0 \leq l \leq m-1. \quad (8)$$

1.2 振动性分析

对于给定的 Runge-Kutta 方法,假设对于 $\delta_1 < z < \delta_2$, 当 $\delta_1 < z < 0$ 时,有 $0 < R(z) < 1$; 当 $0 < z < \delta_2$ 时,有 $1 < R(z) < \infty$. 在下文不妨假设 $h < \frac{\delta}{|a|}$, 其中 $\delta = \min\{|\delta_1|, |\delta_2|\}$.

定理 1 如果 $\{x_n\}$ 和 $\{x_{km}\}$ 分别为方程(8)和方程(7)的解,那么 $\{x_n\}$ 是非振动的充要条件是 $\{x_{km}\}$ 是非振动的.

证明 必要性显然成立,只需证明充分性. 如果 $\{x_{km}\}$ 是非振动的,不失一般性,假设 $\{x_{km}\}$ 是方程(7)的负解,即存在一个 $k_0 \in \mathbb{R}$ 使得对于 $k > k_0$, 有 $x_{km} < 0$. 只需要证对任意的 $k > k_0 + 1$ 和 $l = 0, 1, \dots, m-1$ 有 $x_{km+l} < 0$. 假设 $a_0 < 0, a_1 < 0$, 如果 $a > 0$, 那么 $R(z) > 1$ 并且 $R(z)^{-m} \leq R(z)^{-l}$, 由方程(8)得

$$\begin{aligned} R(z)^{-l} x_{km+l} &= \left(1 + \frac{a_0}{a}(1 - R(z)^{-l})\right) x_{km} + \frac{a_1}{a}(1 - R(z)^{-l}) x_{(k+1)m} \leq \\ &\left(1 + \frac{a_0}{a}(1 - R(z)^{-m})\right) x_{km} + \frac{a_1}{a}(1 - R(z)^{-m}) x_{(k+1)m} = \\ &R(z)^{-m} x_{(k+1)m} < 0. \end{aligned}$$

$a < 0$ 的情形同理可证. 综合以上 2 种情况, 总有 $x_{km+l} < 0$, 故命题得证.

由定理 1 可得到以下结论.

推论 1 如果 $\{x_n\}$ 和 $\{x_{km}\}$ 分别满足方程(8)和方程(7), 那么 $\{x_n\}$ 是振动的充要条件是 $\{x_{km}\}$ 是振动的.

推论 2 如果下列条件之一成立, 那么方程(7)是振动的.

- (i) $a_0 < -\frac{aR(z)^m}{R(z)^m - 1}$ 且 $a_1 < \frac{a}{R(z)^m - 1}$;
- (ii) $a_0 > -\frac{aR(z)^m}{R(z)^m - 1}$ 且 $a_1 > \frac{a}{R(z)^m - 1}$.

证明 方程(7)是振动的充要条件是特征方程的根满足不等式

$$\frac{R(z)^m + \frac{a_0}{a}(R(z)^m - 1)}{1 - \frac{a_1}{a}(R(z)^m - 1)} < 0,$$

根据分子和分母异号, 从而结论成立.

根据引理 3, 可以得到下列解析解振动的结论.

推论 3 如果下列条件之一成立, 那么方程(1)的每一个解都是振动的

- (i) $a_0 < -\frac{ae^a}{e^a - 1}$ 且 $a_1 < \frac{a}{e^a - 1}$;
- (ii) $a_0 > -\frac{ae^a}{e^a - 1}$ 且 $a_1 > \frac{a}{e^a - 1}$.

$$\text{令 } P_1 = -\frac{ae^a}{e^a - 1}, P_1(m) = -\frac{aR(z)^m}{R(z)^m - 1}, P_2 = \frac{a}{e^a - 1}, P_2(m) = \frac{a}{R(z)^m - 1}.$$

引理 4 P_1 和 $P_1(m)$, P_2 和 $P_2(m)$ 的大小关系满足以下 3 种情形:

- (i) 当 $h \rightarrow 0$ 时, 有 $P_1(m) \rightarrow P_1, P_2(m) \rightarrow P_2$;
- (ii) $P_1 \leq P_1(m), P_2 \geq P_2(m)$, 如果下列条件之一成立:
- (a) 对于 $a > 0$, 有 $e^z \leq R(z)$;
- (b) 对于 $a < 0$, 有 $e^z \geq R(z)$.
- (iii) $P_1 > P_1(m), P_2 < P_2(m)$, 如果下列条件之一成立:
- (a) 对于 $a > 0$, 有 $e^z > R(z)$,

(b) 对于 $a < 0$, 有 $e^z < R(z)$.

证明 (i) 显然成立, 接下来我们考虑 (ii). 如果 (a) 成立, 则有 $e^a \leq R(z)^m$, 所以有

$$\frac{1}{e^a - 1} \geq \frac{1}{R(z)^m - 1},$$

从而

$$-\frac{e^a}{e^a - 1} \leq -\frac{R(z)^m}{R(z)^m - 1},$$

即有 $P_1 \leq P_1(m), P_2 \geq P_2(m)$. 其他情形同理可证.

结合定理 1 和推论 1~推论 3 可以得到

定理 2

- (i) Runge-Kutta 方法保持方程(1)的振动性的充分条件是 $P_1 < P_1(m)$ 且 $P_2 > P_2(m)$;
- (ii) Runge-Kutta 方法保持方程(1)的非振动性的充分条件是 $P_1 \geq P_1(m)$ 且 $P_2 \leq P_2(m)$.

引理 5^[20] 设 $R(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ 是指数函数 e^z 的 (r, s) -Padé 逼近, 其中 $\varphi(z), \psi(z)$ 分别为 r 次和 s 次多项式, 那么

- $R(z) < e^z$ 的充要条件是对所有的 $z > 0, s$ 为偶数;
- $R(z) > e^z$ 的充要条件是对所有的 $0 < z < \xi, s$ 为奇数;
- $R(z) > e^z$ 的充要条件是对所有的 $z < 0, r$ 为偶数;
- $R(z) < e^z$ 的充要条件是对所有的 $\eta < z < 0, r$ 为奇数.

式中: ξ 和 η 分别为 $\psi(z)$ 和 $\varphi(z)$ 的实零点.

根据引理 4, 引理 5 和定理 2, 我们可以得到下列结论:

定理 3 设 $R(z)$ 是 e^z 的 (r, s) -Padé 逼近, 那么 Runge-Kutta 方法保持方程(1)的振动性的充分条件是下列条件之一成立:

- $a > 0, h < h_1$ 且 s 为奇数;
- $a < 0, h < h_2$ 且 r 为奇数.

式中: $h_1 = -\frac{\delta_1}{a}, h_2 = -\frac{\delta_2}{a}$.

定理 4 设 $R(z)$ 是 e^z 的 (r, s) -Padé 逼近, 那么 Runge-Kutta 方法保持方程(1)的非振动性的充分条件是下列条件之一成立:

- $a > 0, h < h_1$ 并且 s 为偶数;
- $a < 0, h < h_2$ 并且 r 为偶数,

式中: $h_1 = -\frac{\delta_1}{a}, h_2 = -\frac{\delta_2}{a}$.

对于一些常见的高阶 Runge-Kutta 方法, 相应的结论见表 1 和表 2.

表 1 保持振动性

Runge-Kutta method	Gauss-Legendre	Radau IA, IIA	Lobatto IIIA, IIIB	Lobatto IIIC
(r, s)	(v, v)	$(v - 1, v)$	$(v - 1, v - 1)$	$(v - 2, v)$
$a > 0$	v 为奇数	v 为奇数	v 为偶数	v 为奇数
$a < 0$	v 为奇数	v 为偶数	v 为偶数	v 为奇数

表 2 保持非振动性

Runge-Kutta method	Gauss-Legendre	Radau IA, IIA	Lobatto IIIA, IIIB	Lobatto IIIC
(r, s)	(v, v)	$(v - 1, v)$	$(v - 1, v - 1)$	$(v - 2, v)$
$a > 0$	v 为偶数	v 为偶数	v 为奇数	v 为偶数
$a < 0$	v 为偶数	v 为奇数	v 为奇数	v 为偶数

2 振动性与稳定性的关系

根据引理 2, 有下面的推论:

推论 4 方程(1)的解析解是渐近稳定的充要条件是

$$(a + a_0 + a_1) \left(a_1 - a_0 - \frac{a(e^a + 1)}{e^a - 1} \right) > 0. \quad (9)$$

定理 5 方程(1)的数值解是渐近稳定的充要条件是

$$(a + a_0 + a_1) \left(a_1 - a_0 - \frac{a(R(z)^m + 1)}{R(z)^m - 1} \right) > 0.$$

证明 由方程(7)特征方程的根模小于 1 可证.

根据推论 3 和推论 4, 有如下关于解析解 2 种性质的结论.

定理 6 方程(1)的解析解是

(i) 振动且渐近稳定的, 如果下列条件之一成立:

$$(a) \quad (a + a_0 + a_1) \left(a_1 - a_0 - \frac{a(e^a + 1)}{e^a - 1} \right) > 0, a_0 < -\frac{ae^a}{e^a - 1} \text{ 和 } a_1 < \frac{a}{e^a - 1};$$

$$(b) \quad (a + a_0 + a_1) \left(a_1 - a_0 - \frac{a(e^a + 1)}{e^a - 1} \right) > 0, a_0 > -\frac{ae^a}{e^a - 1} \text{ 和 } a_1 > \frac{a}{e^a - 1}.$$

(ii) 非振动且不稳定的, 如果下列条件之一成立:

$$(a) \quad (a + a_0 + a_1) \left(a_1 - a_0 - \frac{a(e^a + 1)}{e^a - 1} \right) \leq 0, a_0 < -\frac{ae^a}{e^a - 1} \text{ 和 } a_1 \geq \frac{a}{e^a - 1};$$

$$(b) \quad (a + a_0 + a_1) \left(a_1 - a_0 - \frac{a(e^a + 1)}{e^a - 1} \right) \leq 0, a_0 > -\frac{ae^a}{e^a - 1} \text{ 和 } a_1 \leq \frac{a}{e^a - 1}.$$

(iii) 振动且不稳定的, 如果下列条件之一成立:

$$(a) \quad (a + a_0 + a_1) \left(a_1 - a_0 - \frac{a(e^a + 1)}{e^a - 1} \right) \leq 0, a_0 < -\frac{ae^a}{e^a - 1} \text{ 和 } a_1 < \frac{a}{e^a - 1},$$

$$(b) \quad (a + a_0 + a_1) \left(a_1 - a_0 - \frac{a(e^a + 1)}{e^a - 1} \right) \leq 0, a_0 > -\frac{ae^a}{e^a - 1} \text{ 和 } a_1 > \frac{a}{e^a - 1}.$$

(iv) 非振动且渐近稳定的, 如果下列条件之一成立:

$$(a) \quad (a + a_0 + a_1) \left(a_1 - a_0 - \frac{a(e^a + 1)}{e^a - 1} \right) > 0, a_0 < -\frac{ae^a}{e^a - 1} \text{ 和 } a_1 \geq \frac{a}{e^a - 1};$$

$$(b) \quad (a + a_0 + a_1) \left(a_1 - a_0 - \frac{a(e^a + 1)}{e^a - 1} \right) > 0, a_0 > -\frac{ae^a}{e^a - 1} \text{ 和 } a_1 \leq \frac{a}{e^a - 1}.$$

根据推论 2 和定理 5, 有如下关于数值解 2 种性质的结论.

定理 7 方程(1)的数值解是

(i) 振动且渐近稳定的, 如果下列条件之一成立:

$$(a) \quad (a + a_0 + a_1) \left(a_1 - a_0 - \frac{a(R(z)^m + 1)}{R(z)^m - 1} \right) > 0, a_0 < -\frac{aR(z)^m}{R(z)^m - 1} \text{ 且 } a_1 < \frac{a}{R(z)^m - 1};$$

$$(b) \quad (a + a_0 + a_1) \left(a_1 - a_0 - \frac{a(R(z)^m + 1)}{R(z)^m - 1} \right) > 0, a_0 > -\frac{aR(z)^m}{R(z)^m - 1} \text{ 且 } a_1 > \frac{a}{R(z)^m - 1}.$$

(ii) 非振动且不稳定的, 如果下列条件之一成立:

$$(a) \quad (a + a_0 + a_1) \left(a_1 - a_0 - \frac{a(R(z)^m + 1)}{R(z)^m - 1} \right) \leq 0, a_0 < -\frac{aR(z)^m}{R(z)^m - 1} \text{ 且 } a_1 \geq \frac{a}{R(z)^m - 1};$$

$$(b) (a + a_0 + a_1) \left(a_1 - a_0 - \frac{a(R(z)^m + 1)}{R(z)^m - 1} \right) \leq 0, a_0 > -\frac{aR(z)^m}{R(z)^m - 1} \text{ 且 } a_1 \leq \frac{a}{R(z)^m - 1}.$$

(iii) 振动且不稳定的,如果下列条件之一成立:

$$(a) (a + a_0 + a_1) \left(a_1 - a_0 - \frac{a(R(z)^m + 1)}{R(z)^m - 1} \right) \leq 0, a_0 < -\frac{aR(z)^m}{R(z)^m - 1} \text{ 且 } a_1 < \frac{a}{R(z)^m - 1};$$

$$(b) (a + a_0 + a_1) \left(a_1 - a_0 - \frac{a(R(z)^m + 1)}{R(z)^m - 1} \right) \leq 0, a_0 > -\frac{aR(z)^m}{R(z)^m - 1} \text{ 且 } a_1 > \frac{a}{R(z)^m - 1}.$$

(iv) 非振动且渐近稳定的,如果下列条件之一成立:

$$(a) (a + a_0 + a_1) \left(a_1 - a_0 - \frac{a(R(z)^m + 1)}{R(z)^m - 1} \right) > 0, a_0 < -\frac{aR(z)^m}{R(z)^m - 1} \text{ 且 } a_1 \geq \frac{a}{R(z)^m - 1};$$

$$(b) (a + a_0 + a_1) \left(a_1 - a_0 - \frac{a(R(z)^m + 1)}{R(z)^m - 1} \right) > 0, a_0 > -\frac{aR(z)^m}{R(z)^m - 1} \text{ 且 } a_1 \leq \frac{a}{R(z)^m - 1}.$$

3 数值例子

在本节使用以下 4 种 Runge-Kutta 方法:2-级 Gauss-legendre 方法,2-级 Radau IA 方法,3-级 Lobatto IIIB 方法,2-级 Lobatto IIIC 方法来验证前文的结论. 它们的 Butcher 列形式如下:

2-级 Gauss-legendre 方法:

$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6}$
$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

2-级 Radau IA 方法:

0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{12}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

3-级 Lobatto IIIB 方法:

0	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	0
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	0
	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$

2-级 Lobatto IIIC 方法:

0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

考虑下列4个方程:

$$x'(t) = 3x(t) - 2x([t]) + 2x([t+1]), \quad x(0) = 1; \quad (10)$$

$$x'(t) = -3x(t) + 3x([t]) + x([t+1]), \quad x(0) = 1; \quad (11)$$

$$x'(t) = 2x(t) + x([t]) + 2x([t+1]), \quad x(0) = 1; \quad (12)$$

$$x'(t) = -5x(t) + 3x([t]) + x([t+1]), \quad x(0) = 1. \quad (13)$$

由方程(10)知 $a = 3, a_0 = -2, a_1 = 2$, 那么

$$(a + a_0 + a_1) \left(a_1 - a_0 - \frac{a(e^a + 1)}{e^a - 1} \right) \approx 2.0569 > 0;$$

$$a_0 > -\frac{ae^a}{e^a - 1} \approx -3.1572, a_1 > \frac{a}{e^a - 1} \approx 0.1572.$$

因此,定理6中的(i)成立.

解析解的图形由引理1可以作出. 在所有数值解图形中,均令 $m = 50$. 由2-级 Lobatto IIIc 方法知

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

同时有

$$z = ha = \frac{a}{m} = 0.06, R(z) = 1 + z\mathbf{B}^T (I - z\mathbf{A})^{-1} \mathbf{e} = 1.0618,$$

所以

$$(a + a_0 + a_1) \left(a_1 - a_0 - \frac{a(R(z)^m + 1)}{R(z)^m - 1} \right) \approx 2.0550 > 0;$$

$$a_0 > -\frac{aR(z)^m}{R(z)^m - 1} \approx -3.1575, a_1 > \frac{a}{R(z)^m - 1} \approx 0.1575.$$

因此,定理7中的(i)成立.

从图1容易看出方程(10)的解析解和数值解是振动且渐近稳定的,这与定理6和定理7的相应结论一致. 定理的其他结论可用相同的方式进行验证(参见图2~图4).

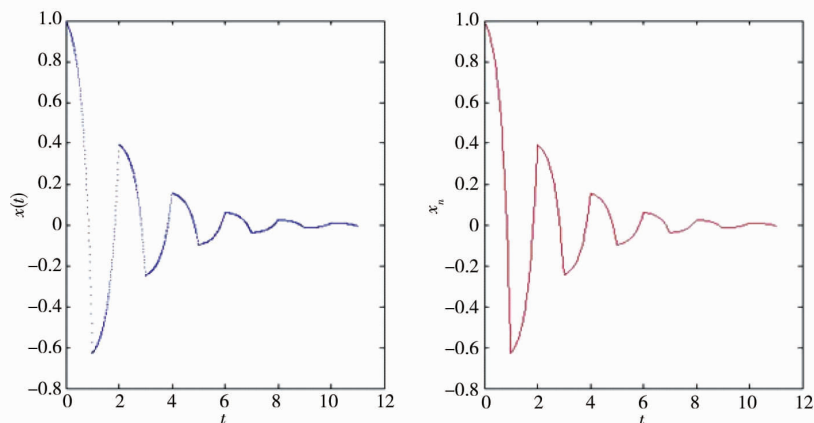


图1 方程(10)的解析解(左图)和2-级 LobattoIIIc 的数值解(右图)

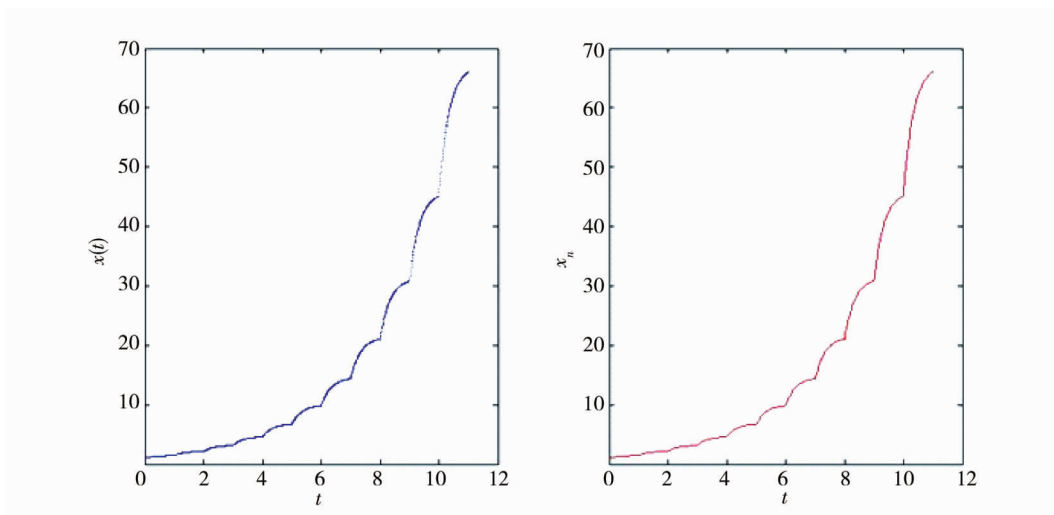


图 2 方程(11)的解析解(左图)和 2-级 Radau IA 方法的数值解(右图)

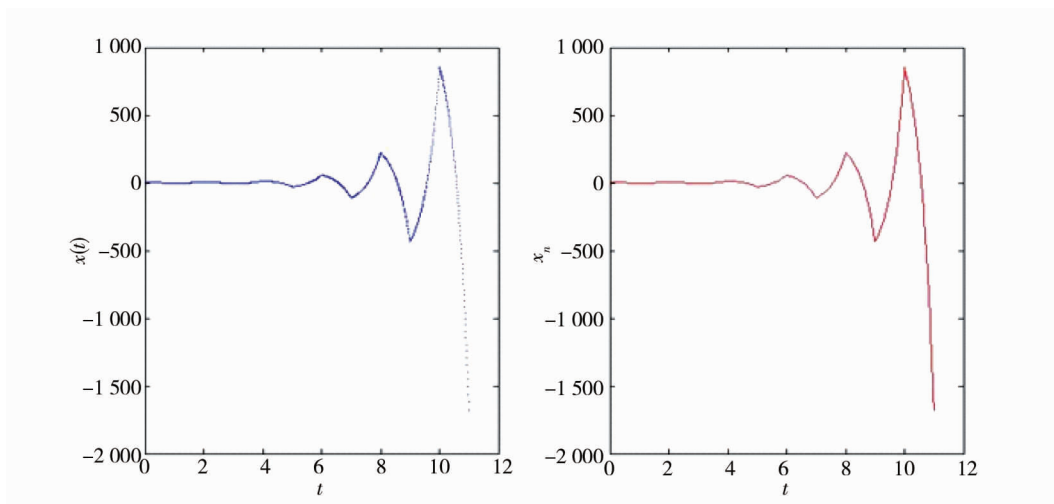


图 3 方程(12)的解析解(左图)和 3-级 Lobatto IIIB 方法的数值解(右图)

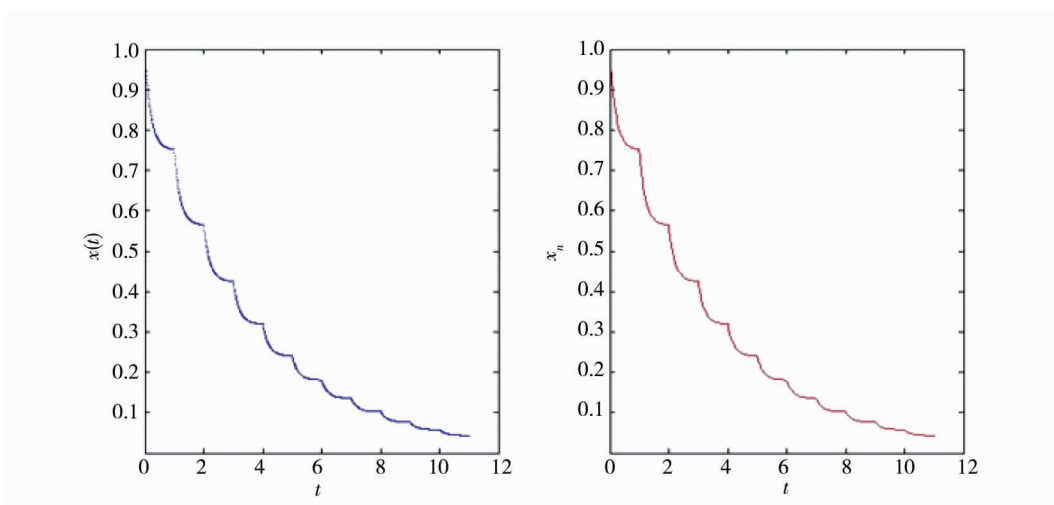


图 4 方程(13)的解析解(左图)和 2-级 Gauss-legendre 方法的数值解(右图)

参考文献:

[1] 沈祖梅,胡良剑.随机时滞微分方程数值解的渐近均方有界性[J].应用数学与计算数学学报, 2016, 30(1): 60-70.
 [2] 王林君,张路.一类分数阶比例时滞微分方程的数值计算方法[J].吉林大学学报(理学版), 2020, 58(3): 486-492.

- [3] SENU N, LEE K C, AHMADIAN A, et al. Numerical solution of delay differential equation using two-derivative Runge-Kutta type method with Newton interpolation[J]. Alexandria Engineering Journal, 2022, 61: 5819–5835.
- [4] 丛玉豪, 赵欢欢, 张艳. 中立型时滞微分系统多步龙格-库塔方法的时滞相关稳定性[J]. 数值计算与计算机应用, 2018, 39(4): 310–320.
- [5] SINGH B K, AGRAWAL S. A new approximation of conformable time fractional partial differential equations with proportional delay[J]. Applied Numerical Mathematics, 2020, 157: 419–433.
- [6] 张瑞瑞, 张小平, 吴智. 基于分段延迟反馈的 Buck-Boost 变换器混沌控制[J]. 湖南科技大学学报(自然科学版), 2020, 35(2): 69–75.
- [7] 王琦, 姚洁怡. 一类泛函微分方程的数值稳定性和振动性(英文)[J]. 聊城大学学报(自然科学版), 2020, 33(2): 18–27.
- [8] LI X Y, LI H X, WU B Y. Piecewise reproducing kernel method for linear impulsive delay differential equations with piecewise constant arguments[J]. Applied Mathematics and Computation, 2019, 349: 304–313.
- [9] CHIU K S. Minimal and maximal solutions to first-order differential equations with piecewise constant generalized delay[J]. Proyecciones (Antofagasta. On line), 2021, 40(1): 175–186.
- [10] YU T H, CAO D Q. Stability analysis of impulsive neural networks with piecewise constant arguments[J]. Neural Processing Letters, 2018, 47(1): 153–165.
- [11] ÖZTÜRK I, BOZKURT F, GURCAN F. Stability analysis of a mathematical model in a microcosm with piecewise constant arguments[J]. Mathematical Biosciences, 2012, 240(2): 85–91.
- [12] AKHMET M, CINCIN D A, TLEUBERGENOVA M, et al. Unpredictable oscillations for Hopfield-type neural networks with delayed and advanced arguments[J]. Mathematics, 2021, 9(5): 1–19.
- [13] LIANG H, LIU M Z, LV W J. Stability of θ -schemes in the numerical solution of a partial differential equation with piecewise continuous arguments[J]. Applied Mathematics Letters, 2010, 23: 198–206.
- [14] YANG Z W, LIU M Z, NIETO J J. Runge-Kutta methods for first-order periodic boundary value differential equations with piecewise constant arguments[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2009, 233: 990–1004.
- [15] GENG Y D, SONG M H, LU Y L, et al. Convergence and stability of the truncated Euler-Maruyama method for stochastic differential equations with piecewise continuous arguments[J]. 高等学校计算数学学报:英文版, 2021, 14(1): 194–218.
- [16] GAO J F. Numerical oscillation and non-oscillation for differential equation with piecewise continuous arguments of mixed type[J]. Applied Mathematics and Computation, 2017, 299: 16–27.
- [17] 周丽莹, 高建芳. 一类自变量分段连续的非线性延迟微分方程数值解振动性[J]. 数学的实践与认识, 2016, 46(16): 221–227.
- [18] SHAH S M, WIENER J. Advanced differential equations with piecewise constant argument deviations[J]. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 1983, 6(4): 671–703.
- [19] HAIRER E, WANNER G. Solving ordinary differential equations II, stiff and differential-algebraic problems[M]. Springer, New York, 1996.
- [20] YANG Z W, LIU M Z, SONG M H. Stability of Runge-Kutta methods in the numerical solution of equation $u'(t) = au(t) + a_0u([t]) + a_1u([t-1])$ [J]. Applied Mathematics and Computation, 2005, 162: 37–50.